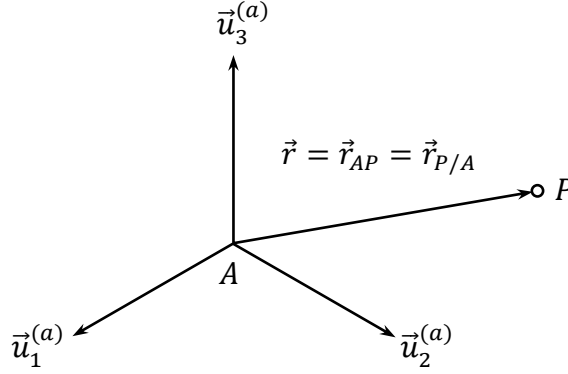


BÖLÜM 1

TEMEL KİNEMATİK

1.1. Bir Noktanın Bir Eksen Takımına Göre Konumu



Şekil 1.1. Bir Noktanın Seçilen Bir Eksen Takımına Göre Konumu

Üç boyutlu uzayda gözlemlenen herhangi bir P noktasının konumu, geleneksel olarak, Şekil 1.1'de de görüldüğü gibi, uygunca seçilen bir \mathcal{F}_a eksen takımına göre ifade edilir. \mathcal{F}_a eksen takımının orijini A ya da O_a ile gösterilen noktayla temsil edilir. \mathcal{F}_a eksen takımının yönelimi ile eksenleri ise, aşağıda gösterilen *temel vektör üçlüsü* ile belirlenir.

$$\mathcal{U}_a = \{\vec{u}_1^{(a)}, \vec{u}_2^{(a)}, \vec{u}_3^{(a)}\} \quad (1.1.1)$$

Genelde, \mathcal{F}_a , *ortonormal* ve *sağ el kuralına uyan* ya da kısaca *sağ elli* olan bir eksen takımı olarak seçilir. Bu özellikler aşağıda açıklanmıştır.

\mathcal{F}_a eksen takımının ortonormal olabilmesi için temel vektörlerinin birbirine dik birim vektörler olması gerekir. Bu özellik, aşağıdaki *nokta çarpım* denklemiyle ifade edilir.

$$\vec{u}_i^{(a)} \cdot \vec{u}_j^{(a)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

\mathcal{F}_a eksen takımının sağ el kuralına uyabilmesi için de temel vektörlerinin aşağıdaki *çarpım* denklemlerini sağlaması gerekir.

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_1^{(a)} \times \vec{u}_2^{(a)} &= \vec{u}_3^{(a)} \\ \vec{u}_2^{(a)} \times \vec{u}_3^{(a)} &= \vec{u}_1^{(a)} \\ \vec{u}_3^{(a)} \times \vec{u}_1^{(a)} &= \vec{u}_2^{(a)} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3)$$

Gözlemlenen P noktasının konumu, \mathcal{F}_a eksen takımının orijinine göre \overline{AP} konum vektörüyle belirlenir. Bu vektör, aşağıdaki değişik biçimlerde gösterilebilir.

$$\vec{r} = \vec{r}_P = \vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{AP} = \overline{AP} \quad (1.1.4)$$

Burada, özellikle, $\vec{r}_{P/A}$ ve \vec{r}_{AP} gösterimlerini birbiriyle karıştırmamak gerekir. Her ikisi de aynı vektörü göstermekle birlikte, $\vec{r}_{P/A}$ vektörü, P noktasının A noktasına göre *bağıl konum vektörü*; \vec{r}_{AP} vektörü ise, A noktasından P noktasına uzanan *konum vektörü* olarak betimlenir.

(1.1.4) denklemindeki \vec{r} vektörü, \mathcal{F}_a eksen takımında şöyle çözümlenir ya da çözüştürülür (yani bileşenlerine ayrıştırılır).

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} r_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} r_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} r_3^{(a)} = \sum_{k=1}^3 \vec{u}_k^{(a)} r_k^{(a)} \quad (1.1.5)$$

(1.1.5) denkleminde, $r_k^{(a)}$, \vec{r} vektörünün \mathcal{F}_a eksen takımındaki k -yinci bileşeni olarak şöyle tanımlanır.

$$r_k^{(a)} = \vec{r} \cdot \vec{u}_k^{(a)} \quad (1.1.6)$$

Bu tanıma göre, $r_k^{(a)}$ bileşeni, \vec{r} vektörünün $\vec{u}_k^{(a)}$ eksen üzerindeki *izdüşümü* olmaktadır.

1.2. Bir Vektörün Bir Eksen Takımındaki Matris Gösterimi

Önceki kısımda olduğu gibi, herhangi bir \vec{r} vektörü, seçilen bir \mathcal{F}_a eksen takımında şöyle çözüştürülür.

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} r_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} r_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} r_3^{(a)} \quad (1.2.1)$$

(1.2.1) denklemindeki bileşenler, $k = 1, 2, 3$ için şöyle tanımlanmıştır.

$$r_k^{(a)} = \vec{r} \cdot \vec{u}_k^{(a)} \quad (1.2.2)$$

Söz konusu bileşenler kullanılarak aşağıdaki biçimlerde gösterilebilen bir *dikey dizin* ya da *dikeysıra matrisi* oluşturulabilir.

$$\bar{r}^{(a)} = [\vec{r}]^{(a)} = [\vec{r}]|_{\mathcal{F}_a} = \begin{bmatrix} r_1^{(a)} \\ r_2^{(a)} \\ r_3^{(a)} \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

Yukarıda oluşturulan $\bar{r}^{(a)}$ dikeysıra matrisi, \vec{r} vektörünün \mathcal{F}_a eksen takımındaki *matris gösterimi* olarak tanımlanır.

Eğer ilgilenilen tüm vektörler için aynı eksen takımı, örneğin \mathcal{F}_a , kullanılıyorsa, gösterim kolaylığı olsun diye, (a) üstyazıtı gizlenebilir ve aşağıdaki basitleştirilmiş gösterimler kullanılabilir.

$$\vec{u}_k^{(a)} \rightarrow \vec{u}_k, r_k^{(a)} \rightarrow r_k, \bar{r}^{(a)} \rightarrow \bar{r} \quad (1.2.4)$$

NOT: Vektörler ve dikeysıra matrisleri, birbirlerinden farklı matematiksel niceliklerdir. Bir vektör, herhangi bir eksen takımına bağlı değildir. Oysa, bir vektörü belli bir eksen takımında temsil eden dikeysıra matrisi, ister istemez, o eksen takımına bağlıdır. Diğer bir deyişle, aynı vektör, farklı eksen takımlarında farklı dikeysıra matrisleriyle temsil edilir. Yani,

$$[\vec{r}]^{(a)} \neq [\vec{r}]^{(b)} \Rightarrow \bar{r}^{(a)} \neq \bar{r}^{(b)} \quad (1.2.5)$$

Bununla birlikte, aynı \vec{r} vektörünün \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b eksen takımlarındaki farklı matris gösterimleri, birbirleriyle $\hat{C}^{(a,b)}$ gibi bir *dönüşüm matrisi* aracılığıyla ilişkilendirilebilirler. Şöyle ki,

$$\bar{r}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \bar{r}^{(b)} \quad (1.2.6)$$

Dönüşüm matrisleri, ilerideki kısımlarda ayrıntılı olarak incelenecektir.

1.3. Vektör İşlemleri ile Matris İşlemleri Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda göz önüne alınan tüm vektörlerin matris gösterimlerinin aynı \mathcal{F}_a eksen takımında oluşturulduğu varsayılmıştır. Dolayısıyla, önceki kısımda bahsedilen *üstyazıtsız basitleştirilmiş gösterim* kullanılmıştır.

1.3.1. Nokta Çarpım ya da Skalar Çarpım

\vec{p} ve \vec{q} gibi iki vektörün nokta çarpımı, \mathcal{F}_a eksen takımındaki bileşenleri cinsinden şöyle ifade edilir.

$$s = \vec{p} \cdot \vec{q} = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 \quad (1.3.1)$$

Aynı işlem, ilgili vektörlerin \mathcal{F}_a eksen takımındaki matris gösterimleriyle şöyle de ifade edilebilir.

$$s = [p_1 \ p_2 \ p_3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \vec{p}^t \vec{q} \quad (1.3.2)$$

Nokta çarpımında çarpanların yeri değiştirilebildiği için aynı sonuç aşağıdaki dört değişik biçimde ifade edilebilir.

$$s = \vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{q} \cdot \vec{p} = \vec{p}^t \vec{q} = \vec{q}^t \vec{p} \quad (1.3.3)$$

Bu arada, $\vec{p}^t = [p_1 \ p_2 \ p_3]$ ve $\vec{q}^t = [q_1 \ q_2 \ q_3]$, \vec{p} ve \vec{q} vektörlerinin \mathcal{F}_a eksen takımındaki *yataysıra matris gösterimleri* olarak adlandırılır.

1.3.2. Çapraz Çarpım ya da Vektörel Çarpım

\vec{p} ve \vec{q} gibi iki vektörün çapraz çarpımı, yeni bir \vec{r} vektörü verir. Şöyle ki,

$$\vec{r} = \vec{p} \times \vec{q} \quad (1.3.4)$$

İlgili vektörlerin \mathcal{F}_a eksen takımındaki bileşenleri kullanılarak (1.3.4) vektör denkleminde yola çıkılarak aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{u}_1 r_1 + \vec{u}_2 r_2 + \vec{u}_3 r_3 = \det \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \vec{r} &= \vec{u}_1(p_2q_3 - p_3q_2) + \vec{u}_2(p_3q_1 - p_1q_3) + \vec{u}_3(p_1q_2 - p_2q_1) \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_2q_3 - p_3q_2 \\ p_3q_1 - p_1q_3 \\ p_1q_2 - p_2q_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Görüldüğü gibi, yukarıdaki matris denkleminde, \vec{p} ve \vec{q} vektörlerinin bileşenleri iç içe geçmiş durumdadır. Bu girift ifadeyi netleştirmek ve bileşenleri iki ayrı matrise yerleştirmek amacıyla, aşağıda gösterilen biçimde bir *faktörizasyon (çarpanlara ayırma)* işlemi yapılabilir.

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (1.3.5)$$

(1.3.5) denklemi, derleşik olarak kısaca şöyle de yazılabilir.

$$\vec{r} = \tilde{p}\bar{q} \quad (1.3.6)$$

Yukarıdaki \tilde{p} (*p-tilde*) simgesi, \bar{p} dikeysıra matrisinden türetilen *antisimetrik kare matrisi* göstermektedir. Bu matris, *çapraz çarpım matrisi* olarak da adlandırılır ve aşağıda gösterilen biçimde "asm" (*antisimetrik matris türetme*) işleci kullanılarak oluşturulur.

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{p} = \text{asm}(\bar{p}) = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.7)$$

1.3.3. Çapraz Çarpım Matrislerinin Tipik Özellikleri

Çapraz çarpım matrislerinin bazı önde gelen özellikleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\det(\tilde{p}) = 0 \quad (1.3.8)$$

$$\tilde{p}\bar{p} = \bar{0}, \quad \bar{p}^t\tilde{p} = \bar{0}^t \quad (1.3.9)$$

$$\tilde{p}\tilde{q} = \bar{q}\bar{p}^t - (\bar{q}^t\bar{p})\hat{I} \quad (1.3.10)$$

$$\tilde{p}^2 = \bar{p}\bar{p}^t - (\bar{p}^t\bar{p})\hat{I} \quad (1.3.11)$$

$$\text{asm}(\tilde{p}\tilde{q}) = \tilde{p}\tilde{q} - \tilde{q}\tilde{p} = \bar{q}\bar{p}^t - \bar{p}\bar{q}^t \quad (1.3.12)$$

$$\text{asm}(\hat{R}\bar{p}) = \hat{R}\tilde{p}\hat{R}^t \quad (1.3.13)$$

NOT: (1.3.10) ve (1.3.12) denklemlerindeki çarpanların sıralanmalarına dikkat edilmelidir.

Yukarıdaki denklemlerde, \hat{I} simgesi *birim matrisi* göstermektedir. Yani,

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3.14)$$

\hat{R} matrisi ise, ortonormal ve determinanı bir olan bir dönme matrisini göstermektedir. Yani,

$$\hat{R}^t\hat{R} = \hat{R}\hat{R}^t = \hat{I} \quad \text{ve} \quad \det(\hat{R}) = 1 \quad (1.3.15)$$

Eğer \vec{n} bir birim vektör ise, yani $\bar{n}^t\bar{n} = 1$ ise,

$$\tilde{n}^2 = \bar{n}\bar{n}^t - \hat{I} \quad (1.3.16)$$

$$\tilde{n}^3 = -\tilde{n} \quad (1.3.17)$$

\hat{M} gibi herhangi bir 3×3 boyutlu kare matris, aşağıda görüldüğü gibi, dikeysıralarına ayrıştırılarak ifade edilebilir.

$$\hat{M} = [\bar{m}_1 \quad \bar{m}_2 \quad \bar{m}_3] \quad (1.3.18)$$

Bu durumda, \hat{M} matrisinin determinanı şöyle elde edilebilir.

$$\det(\hat{M}) = \bar{m}_1^t\bar{m}_2\bar{m}_3 = \bar{m}_2^t\bar{m}_3\bar{m}_1 = \bar{m}_3^t\bar{m}_1\bar{m}_2 \quad (1.3.19)$$

Örnek 1.3.1:

Aşağıdaki üçlü vektörel çarpımların açılımlarını elde ediniz.

$$\vec{p} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \quad (1.3.20)$$

$$\vec{q} = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \quad (1.3.21)$$

(1.3.20) denkleminin seçilen \mathcal{F}_a eksen takımındaki matris karşılığı şöyledir.

$$\bar{p} = \tilde{u}(\tilde{v}\bar{w}) \quad (1.3.22)$$

Matris çarpımı da, çapraz çarpım gibi, *yer değiştirmeli (commutative)* değildir. Fakat, çapraz çarpımdan farklı olarak *birleşmeli (associative)* bir işlemdir. Bu nedenle, (1.3.22) denklemindeki parantezlerin önemi yoktur. Dolayısıyla, (1.3.22) denklemi şöyle de yazılabilir.

$$\bar{p} = (\tilde{u}\tilde{v})\bar{w} \quad (1.3.23)$$

Öte yandan, (1.3.10) denklemine göre,

$$\tilde{u}\tilde{v} = \bar{v}\bar{u}^t - (\bar{v}^t\bar{u})\hat{I} \quad (1.3.24)$$

Böylece, (1.3.23) denklemi şu şekli alır.

$$\bar{p} = [\bar{v}\bar{u}^t - (\bar{v}^t\bar{u})\hat{I}]\bar{w} = \bar{v}\bar{u}^t\bar{w} - (\bar{v}^t\bar{u})\bar{w} = (\bar{u}^t\bar{w})\bar{v} - (\bar{v}^t\bar{u})\bar{w} \quad (1.3.25)$$

(1.3.25) sayılı matris denklemi ise, aşağıdaki vektör denkleminin karşılığıdır.

$$\vec{p} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} \quad (1.3.26)$$

(1.3.21) denklemine gelince, çapraz çarpımın sıralama değiştirme özelliği kullanılarak, bu denklem şöyle de yazılabilir

$$\vec{q} = -\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = -\vec{w} \times (-\vec{v} \times \vec{u}) = \vec{w} \times (\vec{v} \times \vec{u}) \quad (1.3.27)$$

Şimdi, (1.3.20) ve (1.3.26) denklemleri örnek alınarak, aşağıdaki açılım doğrudan doğruya yazılabilir.

$$\vec{q} = (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v} - (\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} \quad (1.3.28)$$

Örnek 1.3.2:

Aşağıdaki denklemi x_1, x_2, x_3 bilinmeyenleri için çözünüz.

$$\bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + \bar{a}_3x_3 = \bar{y} \quad (1.3.30)$$

Çözüm için vektörel çarpım işleminin aşağıdaki özellikleri kullanılabilir.

$$\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}\vec{v} = \vec{0} \quad (1.3.31)$$

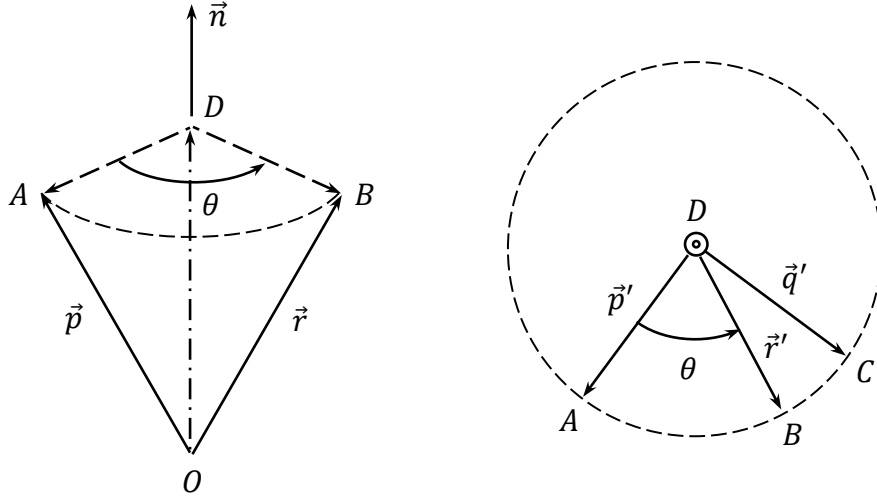
$$\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = \vec{0}, \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}^t\vec{v}\vec{u} = \vec{0}, \vec{v}^t\vec{u}\vec{v} = \vec{0} \quad (1.3.32)$$

Bu özelliklerin (1.3.30) denkleminde uygulanmasıyla, çözüm aşağıdaki ifadelerle elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (\bar{a}_2^t\bar{a}_3\bar{y})/(\bar{a}_2^t\bar{a}_3\bar{a}_1) \\ x_2 &= (\bar{a}_3^t\bar{a}_1\bar{y})/(\bar{a}_3^t\bar{a}_1\bar{a}_2) \\ x_3 &= (\bar{a}_1^t\bar{a}_2\bar{y})/(\bar{a}_1^t\bar{a}_2\bar{a}_3) \end{aligned} \right\} \quad (1.3.33)$$

1.4. Bir Vektörün Bir Eksen Etrafında Dönmesi

1.4.1. Rodrigues Formülü ve Dönme Matrisi



Şekil 1.2. Bir vektörün bir eksen etrafında dönmesi

Şekil 1.2'de bir \vec{p} vektörünün bir \vec{r} vektörüne dönmesi görülmektedir. Dönme açısı θ ile, dönme eksenini temsil eden birim vektör ise \vec{n} ile gösterilmiştir. \vec{p} vektörü, \vec{r} vektörüne dönerken konik bir yüzey üzerinde hareket eder. Bu dönmenin söz konusu koninin tabanındaki izdüşüm görüntüsü, Şekil 1.2'nin sağında gösterilmiştir. Bu dönmenin sonucu olan \vec{r} vektörü, Şekil 1.2 göz önüne alınarak aşağıda yazılan denklem dizisi sonunda ortaya çıkar.

$$\vec{p} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} = \vec{s} + \vec{p}' \Rightarrow$$

$$\vec{p}' = \vec{p} - \vec{s} \quad (1.4.1)$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} = \vec{s} + \vec{r}' \Rightarrow$$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{s} \quad (1.4.2)$$

$$\vec{s} = (\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}) \quad (1.4.3)$$

$$\vec{q}' = \overrightarrow{DC} = \vec{n} \times \overrightarrow{DA} = \vec{n} \times \vec{p}' \Rightarrow$$

$$\vec{q}' = \vec{n} \times (\vec{p} - \vec{s}) = \vec{n} \times [\vec{p} - (\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{n}] = \vec{n} \times \vec{p} \quad (1.4.4)$$

Şekil 1.2'nin sağındaki görüntüye göre,

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} \cos \theta + \overrightarrow{DC} \sin \theta \Rightarrow$$

$$\vec{r}' = \vec{p}' \cos \theta + \vec{q}' \sin \theta \quad (1.4.5)$$

(1.4.5) denklemi, (1.4.1) – (1.4.4) denklemleriyle birlikte aşağıdaki denklemlere yol açar.

$$\vec{r} - \vec{s} = (\vec{p} - \vec{s}) \cos \theta + (\vec{n} \times \vec{p}) \sin \theta \Rightarrow$$

$$\vec{r} = \vec{p} \cos \theta + (\vec{n} \times \vec{p}) \sin \theta + \vec{s}(1 - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$\vec{r} = \vec{p} \cos \theta + (\vec{n} \times \vec{p}) \sin \theta + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p})(1 - \cos \theta) \quad (1.4.6)$$

(1.4.6) denklemi, dönme sonucunda ortaya çıkan \vec{r} vektörünü vermektedir. Bu denklem, *Rodrigues denklemi* olarak da bilinir. Rodrigues denklemi, seçilen bir \mathcal{F}_a eksen takımında, (a) üstyazıtları gizlenerek, aşağıdaki matris denklemi biçiminde de yazılabilir.

$$\vec{r} = \bar{p} \cos \theta + (\tilde{n}\bar{p}) \sin \theta + \bar{n}(\bar{n}^t\bar{p})(1 - \cos \theta) \quad (1.4.7)$$

(1.4.7) denklemi, \bar{p} bir çarpan olarak ayrılıp şöyle de yazılabilir.

$$\vec{r} = \hat{R}\bar{p} \quad (1.4.8)$$

(1.4.8) denklemdeki \hat{R} matrisi, "dönme matrisi" olarak şöyle tanımlanır.

$$\hat{R} = \hat{R}(\bar{n}, \theta) = \hat{I} \cos \theta + \tilde{n} \sin \theta + \bar{n}\bar{n}^t(1 - \cos \theta) \quad (1.4.9)$$

Bu arada, \bar{n} bir birim vektör olduğu için, yani $\bar{n}^t\bar{n} = 1$ olduğu için, (1.3.16) denklemine göre,

$$\tilde{n}^2 = \bar{n}\bar{n}^t - \hat{I} \Rightarrow \bar{n}\bar{n}^t = \tilde{n}^2 + \hat{I} \quad (1.4.10)$$

Böylece, \hat{R} matrisi, daha kısa bir biçimde, şöyle de ifade edilebilir.

$$\hat{R} = \hat{R}(\tilde{n}, \theta) = \hat{I} + \tilde{n} \sin \theta + \tilde{n}^2(1 - \cos \theta) \quad (1.4.11)$$

\hat{R} matrisi için Taylor serisi açılımlarından yararlanarak çok daha derleşik bir ifade elde edilebilir. Bu amaçla, (1.4.11) denklemi, $\sin \theta$ ve $\cos \theta$ işlevlerinin Taylor serisi açılımları kullanılarak şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} \hat{R} = \hat{I} + \tilde{n} \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots \right) \\ + \tilde{n}^2 \left(\frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{1}{6!}\theta^6 - \frac{1}{8!}\theta^8 + \dots \right) \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Öte yandan, (1.3.16) ve (1.3.17) denklemlerine göre, \tilde{n} matrisinin çeşitli dereceden kuvvetleri yalnızca \tilde{n} ya da \tilde{n}^2 cinsinden ifade edilebilir. Şöyle ki,

$$\tilde{n}^3 = -\tilde{n}, \quad \tilde{n}^4 = -\tilde{n}^2, \quad \tilde{n}^5 = \tilde{n}, \quad \tilde{n}^6 = \tilde{n}^2, \quad \tilde{n}^7 = -\tilde{n}, \dots \quad (1.4.13)$$

(1.4.12) ve (1.4.13) denklemleri birleştirilince, \hat{R} için aşağıdaki Taylor serisi açılımı ortaya çıkar.

$$\hat{R} = \hat{I} + \tilde{n}\theta + \frac{1}{2!}(\tilde{n}\theta)^2 + \frac{1}{3!}(\tilde{n}\theta)^3 + \frac{1}{4!}(\tilde{n}\theta)^4 + \dots \quad (1.4.14)$$

Dikkat edilirse, (1.4.14) denklemdeki açılım, $(\tilde{n}\theta)$ kare matrisi için yazılmış olsa da, x gibi bir skalar için yazılmış olan aşağıdaki *üstel işlevin* Taylor serisi açılımıyla aynıdır.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \quad (1.4.15)$$

Böylece, (1.4.15) denklemine dayanarak, \hat{R} matrisi için de aşağıdaki son derece derleşik üstel işlev ifadesi elde edilmiş olur.

$$\hat{R} = \hat{R}(\tilde{n}, \theta) = e^{\tilde{n}\theta} \quad (1.4.16)$$

Yukarıdaki ifade yalnızca derleşik olmayıp aynı zamanda dönme eksenini ile dönme açısını da açık olarak göstermesi nedeniyle oldukça kullanışlıdır. Bu biçimde ifade edildiğinde, \hat{R} için kısaca *üstel dönme matrisi* deyimi kullanılabilir.

1.4.2. Temel Dikeysıra Matrisleri ve Temel Dönme Matrisleri

Temel dikeysıra matrisleri, bir üçlü grup oluşturmak üzere şöyle tanımlanırlar.

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.4.17)$$

Temel dikeysıra matrisleri, üç boyutlu *dikeysıra matris uzayının* temelini oluştururlar. Öyle ki, \bar{c} gibi herhangi bir dikeysıra matrisi, üç temel dikeysıra matrisinin *doğrusal bileşimi* olarak aşağıda gösterilen biçimde ifade edilebilir.

$$\bar{c} = c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 + c_3 \bar{u}_3 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (1.4.18)$$

Temel dikeysıra matrisleri, aynı zamanda, \mathcal{F}_a gibi bir eksen takımının temel birim vektörlerinin yine \mathcal{F}_a içinde ifade edilen matris gösterimleridir. Şöyle ki, $k = 1, 2, 3$ için,

$$\bar{u}_k = \bar{u}_k^{(a/a)} = [\bar{u}_k^{(a)}]^{(a)} = [\bar{u}_k^{(a)}]_{\mathcal{F}_a} \quad (1.4.19)$$

Eğer dönme işlemi, seçilen bir \mathcal{F}_a eksen takımının eksenlerinden biri, örneğin $\bar{u}_k^{(a)}$ eksenini, etrafında yapılıyorsa, dönme eksenini birim vektörü, $\bar{n} = \bar{u}_k^{(a)}$ olur. Bu durumda, \bar{n} vektörünün \mathcal{F}_a eksen takımındaki matris gösterimi, aşağıda görüldüğü gibi, k -yinci temel dikeysıra matrisi olur.

$$\bar{n} = \bar{n}^{(a)} = \bar{u}_k^{(a/a)} = \bar{u}_k \quad (1.4.20)$$

Aynı eksen etrafında belli bir θ açısıyla dönmeyi sağlayan matris ise, k -yinci *temel dönme matrisi* olarak aşağıdaki denklemle tanımlanır.

$$\hat{R}_k = \hat{R}_k(\theta) = \hat{R}(\bar{u}_k, \theta) = e^{\bar{u}_k \theta} \quad (1.4.21)$$

Birbirine dik üç eksen etrafındaki üç temel dönme matrisinin (1.4.9) denklemi kullanılarak elde edilen ayrıntılı ifadeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\hat{R}_1(\phi) = e^{\bar{u}_1 \phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.4.22)$$

$$\hat{R}_2(\theta) = e^{\bar{u}_2 \theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.4.23)$$

$$\hat{R}_3(\psi) = e^{\bar{u}_3 \psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4.24)$$

1.4.3. Dönme Matrislerinin Tipik Özellikleri

Dönme matrislerinin bazı önde gelen özelliklerini yansıtan eşitlikler ve eşitsizlikler aşağıda sıralanmıştır.

- Bir dönme matrisinin en karakteristik özelliği:

$$\det(e^{\bar{n}\theta}) = +1 \quad (1.4.25)$$

- Ters dönme eşitlikleri:

$$(e^{\tilde{n}\theta})^{-1} = (e^{\tilde{n}\theta})^t = e^{-\tilde{n}\theta} = e^{\tilde{n}(-\theta)} = e^{(-\tilde{n})\theta} \quad (1.4.26)$$

- Dönme ekseninde işlevsizlik eşitlikleri:

$$e^{\tilde{n}\theta}\bar{n} = \bar{n}, \bar{n}^t e^{\tilde{n}\theta} = \bar{n}^t \quad (1.4.27)$$

- Yer değiştirme (komütatif olma) eşitliği ve bu eşitliği izleyen eşitsizlik:

$$e^{\tilde{n}\theta}\tilde{n} = \tilde{n}e^{\tilde{n}\theta} \neq \tilde{n} \quad (1.4.28)$$

- Paralel eksenli dönme eşitlikleri:

$$e^{\tilde{n}\theta}e^{\tilde{n}\phi} = e^{\tilde{n}\phi}e^{\tilde{n}\theta} = e^{\tilde{n}(\theta+\phi)} \quad (1.4.29)$$

- Aykırı eksenli dönme eşitsizlikleri:

$$e^{\tilde{n}\theta}e^{\tilde{m}\phi} \neq e^{\tilde{m}\phi}e^{\tilde{n}\theta} \neq e^{(\tilde{n}\theta+\tilde{m}\phi)} \quad (1.4.30)$$

- Açıya göre türev alma eşitlikleri:

$$\partial(e^{\tilde{n}\theta})/\partial\theta = e^{\tilde{n}\theta}\tilde{n} = \tilde{n}e^{\tilde{n}\theta} \quad (1.4.31)$$

- Ekstra dönme eşitlikleri:

$$e^{\tilde{n}(\theta+\sigma\pi/2)} = \sigma\tilde{n}e^{\tilde{n}\theta} + \bar{n}\bar{n}^t \quad (\text{ekstra çeyrek tur dönme}) \quad (1.4.32)$$

$$e^{\tilde{n}(\theta+\sigma\pi)} = -e^{\tilde{n}\theta} + 2\bar{n}\bar{n}^t \quad (\text{ekstra yarım tur dönme}) \quad (1.4.33)$$

$$e^{\tilde{n}(\theta+2\sigma\pi)} = e^{\tilde{n}\theta} \quad (\text{ekstra tam tur dönme}) \quad (1.4.34)$$

Yukarıdaki formüllerde, $\sigma = \pm 1$, dönme yönünü gösteren işaret değişkenidir.

Temel dönme ve temel dikeysıra matrisleri ise, aşağıdaki özellikleri paylaşırlar.

- Dönme ekseninde işlevsizlik:

$$e^{\tilde{u}_k\theta}\bar{u}_k = \bar{u}_k, \bar{u}_k^t e^{\tilde{u}_k\theta} = \bar{u}_k^t \quad (1.4.35)$$

- Açılım eşitlikleri:

$$e^{\tilde{u}_i\theta}\bar{u}_j = \bar{u}_j \cos \theta + \bar{n}_{ij} \sin \theta; \bar{n}_{ij} = \tilde{u}_i\bar{u}_j = \bar{u}_i \times \bar{u}_j \quad (\text{düz açılım}) \quad (1.4.36)$$

$$\bar{u}_j^t e^{\tilde{u}_i\theta} = \bar{u}_j^t \cos \theta + \bar{n}_{ji}^t \sin \theta; \bar{n}_{ji} = \tilde{u}_j\bar{u}_i = \bar{u}_j \times \bar{u}_i \quad (\text{devrik açılım}) \quad (1.4.37)$$

- Kaydırma eşitlikleri:

$$e^{\tilde{u}_i\pi/2}e^{\tilde{u}_j\theta} = e^{\tilde{n}_{ij}\theta}e^{\tilde{u}_i\pi/2}; \bar{n}_{ij} = \tilde{u}_i\bar{u}_j \quad (i \neq j \text{ için } 90^\circ\text{lik kaydırma}) \quad (1.4.38)$$

$$e^{\tilde{u}_i\pi}e^{\tilde{u}_j\theta} = e^{-\tilde{u}_j\theta}e^{\tilde{u}_i\pi} \quad (i \neq j \text{ için } 180^\circ\text{lik kaydırma}) \quad (1.4.39)$$

$$e^{\tilde{u}_k\pi/2}e^{\tilde{u}_k\theta} = e^{\tilde{u}_k\theta}e^{\tilde{u}_k\pi/2} = e^{\tilde{u}_k(\theta+\pi/2)} \quad (\text{paralel eksenli } 90^\circ\text{lik kaydırma}) \quad (1.4.40)$$

$$e^{\tilde{u}_k\pi}e^{\tilde{u}_k\theta} = e^{\tilde{u}_k\theta}e^{\tilde{u}_k\pi} = e^{\tilde{u}_k(\theta+\pi)} \quad (\text{paralel eksenli } 180^\circ\text{lik kaydırma}) \quad (1.4.41)$$

- Birbirine dik farklı eksenler etrafında üç yarım dönme:

$$e^{\tilde{u}_i\pi}e^{\tilde{u}_j\pi}e^{\tilde{u}_k\pi} = \hat{I}; i \neq j \neq k \quad (1.4.42)$$

Örnek 1.4.1:

Bu örnek, \mathcal{F}_a gibi bir eksen takımında gözlemlenen bir dönme işlemi hakkındadır. İki adımlı bu dönme işlemi, şematik olarak aşağıda gösterilmiştir.

$$\vec{p} = \vec{u}_1^{(a)} \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_2^{(a)}, \theta]} \vec{q} \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_3^{(a)}, \psi]} \vec{r} \quad (1.4.43)$$

Bu işlem sonucunda ortaya çıkan vektörleri belirlemek amacıyla, ilgili vektörlerin \mathcal{F}_a eksen takımındaki üstyazıtımsız matris gösterimleri kullanılarak dönme işleminin iki adımı için aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\vec{q} = \hat{R}_2(\theta)\vec{p} = e^{\tilde{u}_2\theta}(\vec{u}_1) = e^{\tilde{u}_2\theta}\vec{u}_1 \quad (1.4.44)$$

$$\vec{r} = \hat{R}_3(\psi)\vec{q} = e^{\tilde{u}_3\psi}(e^{\tilde{u}_2\theta}\vec{u}_1) = (e^{\tilde{u}_3\psi}e^{\tilde{u}_2\theta})\vec{u}_1 \quad (1.4.45)$$

Kısım 1.4.3'teki *açılım eşitliği* kullanılarak (1.4.44) ve (1.4.45) denklemleri üzerinde aşağıdaki işlemler yapılabilir.

$$\vec{q} = e^{\tilde{u}_2\theta}\vec{u}_1 = \vec{u}_1 \cos \theta - \vec{u}_3 \sin \theta \quad (1.4.46)$$

$$\vec{r} = e^{\tilde{u}_3\psi}(\vec{u}_1 \cos \theta - \vec{u}_3 \sin \theta) = (e^{\tilde{u}_3\psi}\vec{u}_1) \cos \theta - (e^{\tilde{u}_3\psi}\vec{u}_3) \sin \theta \Rightarrow$$

$$\vec{r} = (\vec{u}_1 \cos \psi + \vec{u}_2 \sin \psi) \cos \theta - \vec{u}_3 \sin \theta \Rightarrow$$

$$\vec{r} = \vec{u}_1 \cos \psi \cos \theta + \vec{u}_2 \sin \psi \cos \theta - \vec{u}_3 \sin \theta \quad (1.4.47)$$

(1.4.46) ve (1.4.47) matris denklemlerinde, $\vec{q} = \vec{q}^{(a)}$, $\vec{r} = \vec{r}^{(a)}$, ve $k = 1, 2, 3$ için $\vec{u}_k = \vec{u}_k^{(a/a)}$ olduğu göz önüne alınarak söz konusu denklemlere karşılık gelen vektör denklemleri şöyle yazılabilir.

$$\vec{q} = \vec{u}_1^{(a)} \cos \theta - \vec{u}_3^{(a)} \sin \theta \quad (1.4.48)$$

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} \cos \psi \cos \theta + \vec{u}_2^{(a)} \sin \psi \cos \theta - \vec{u}_3^{(a)} \sin \theta \quad (1.4.49)$$

Örnek 1.4.2:

Bu örnek, Örnek 1'deki dönme sırasının, aşağıda gösterildiği gibi, tersine çevrilmesi hakkındadır.

$$\vec{p} = \vec{u}_1^{(a)} \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_3^{(a)}, \psi]} \vec{q}' \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_2^{(a)}, \theta]} \vec{r}' \quad (1.4.50)$$

Bu örneğin amacı, aykırı (paralel olmayan) eksenler etrafında peşpeşe yapılan uzaysal dönmelerde, dönme sırası değişince sonucun da değişeceğini göstermektir.

NOT: Peşpeşe yapılan düzlemsel dönmelerde ise, düzleme dik olan dönme eksenleri hep aynı kalır. Bu nedenle, düzlemsel dönmelerde dönme sırasının önemi yoktur. Sonuç değişmez.

(1.4.50)'deki dönme sıralamasına göre, \vec{q}' ve \vec{r}' vektörlerinin \mathcal{F}_a eksen takımındaki matris gösterimleri şöyle olur.

$$\vec{q}' = \hat{R}_3(\psi)\vec{p} = e^{\tilde{u}_3\psi}(\vec{u}_1) = e^{\tilde{u}_3\psi}\vec{u}_1 = \vec{u}_1 \cos \psi + \vec{u}_2 \sin \psi \quad (1.4.51)$$

$$\vec{r}' = \hat{R}_2(\theta)\vec{q}' = e^{\tilde{u}_2\theta}(e^{\tilde{u}_3\psi}\vec{u}_1) = (e^{\tilde{u}_2\theta}e^{\tilde{u}_3\psi})\vec{u}_1 \Rightarrow$$

$$\vec{r}' = e^{\tilde{u}_2\theta}(\vec{u}_1 \cos \psi + \vec{u}_2 \sin \psi) \Rightarrow$$

$$\vec{r}' = (e^{\tilde{u}_2\theta}\vec{u}_1) \cos \psi + (e^{\tilde{u}_2\theta}\vec{u}_2) \sin \psi \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= (\bar{u}_1 \cos \theta - \bar{u}_3 \sin \theta) \cos \psi + \bar{u}_2 \sin \psi \Rightarrow \\ \vec{r}' &= \bar{u}_1 \cos \theta \cos \psi + \bar{u}_2 \sin \psi - \bar{u}_3 \sin \theta \cos \psi\end{aligned}\quad (1.4.52)$$

(1.4.51) ve (1.4.52) matris denklemlerine karşılık gelen vektör denklemleri ise şöyledir.

$$\vec{q}' = \bar{u}_1^{(a)} \cos \psi + \bar{u}_2^{(a)} \sin \psi \quad (1.4.53)$$

$$\vec{r}' = \bar{u}_1^{(a)} \cos \theta \cos \psi + \bar{u}_2^{(a)} \sin \psi - \bar{u}_3^{(a)} \sin \theta \cos \psi \quad (1.4.54)$$

Görüldüğü gibi, \vec{q}' ve \vec{r}' sonuçları, önceki \vec{q} ve \vec{r} sonuçlarından oldukça farklıdır.

1.5. Dönme Açısının ve Ekseninin Bulunması

Euler-Chasles teoremine göre, değişik eksenler etrafında değişik açılarla peşpeşe yapılan birden çok sayıdaki dönmenin sonucu, belli bir eksen etrafında belli bir açıyla yapılan tek bir dönmeye sağlanabilir. Bu açı ve eksenin nasıl bulunacağı aşağıda açıklanmıştır.

Sayısı m olan çeşitli dönmelerin sonucunda ortaya çıkan \hat{R} matrisi, şöyle ifade edilebilir.

$$\hat{R} = \hat{R}_1 \hat{R}_2 \hat{R}_3 \dots \hat{R}_m = e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} e^{\tilde{n}_3 \theta_3} \dots e^{\tilde{n}_m \theta_m} \quad (1.5.1)$$

Sonuçta ortaya çıkan bileşik \hat{R} matrisi ise, eşdeğerli tek bir dönme matrisi olarak şöyle de ifade edilebilir.

$$\hat{R} = e^{\tilde{n} \theta} = \hat{I} \cos \theta + \tilde{n} \sin \theta + \tilde{n} \tilde{n}^t (1 - \cos \theta) \quad (1.5.2)$$

Eşdeğerli tek dönmeye ait θ açısını ve bu dönmenin eksenini temsil eden \tilde{n} birim vektörünün bileşenlerini bulmak üzere, (1.5.2) denklemini, daha açık olarak şöyle de yazılabilir.

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cos \theta + \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \sin \theta \\ &+ \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix} (1 - \cos \theta)\end{aligned}\quad (1.5.3)$$

(1.5.3) matris denkleminde aşağıdaki skalar denklemler elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= \cos \theta + n_1^2 (1 - \cos \theta) \\ r_{22} &= \cos \theta + n_2^2 (1 - \cos \theta) \\ r_{33} &= \cos \theta + n_3^2 (1 - \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.4)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{12} &= -n_3 \sin \theta + n_1 n_2 (1 - \cos \theta) \\ r_{23} &= -n_1 \sin \theta + n_2 n_3 (1 - \cos \theta) \\ r_{31} &= -n_2 \sin \theta + n_3 n_1 (1 - \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{21} &= n_3 \sin \theta + n_1 n_2 (1 - \cos \theta) \\ r_{32} &= n_1 \sin \theta + n_2 n_3 (1 - \cos \theta) \\ r_{13} &= n_2 \sin \theta + n_3 n_1 (1 - \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.6)$$

Öncelikle θ açısı, (1.5.4) denklem grubundan, $|\tilde{n}| = 1$ olduğu göz önüne alınarak, aşağıdaki işlemler yoluyla bulunur.

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 3 \cos \theta + (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)(1 - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 3 \cos \theta + (1)(1 - \cos \theta) \Rightarrow$$

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 2 \cos \theta + 1 \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \xi = (r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)/2 \quad (1.5.7)$$

$$\sin \theta = \eta = \sigma \sqrt{1 - \xi^2}; \quad \sigma = \pm 1 \quad (1.5.8)$$

$$\theta = \text{atan}_2(\eta, \xi) = \text{atan}_2(\sigma \sqrt{1 - \xi^2}, \xi) = \sigma \text{atan}_2(\sqrt{1 - \xi^2}, \xi) \quad (1.5.9)$$

Yukarıdaki çözümde, $\sigma = \pm 1$, değeri keyfi olarak seçilebilecek bir işaret değişkenidir.

Çözümde kullanılan $\text{atan}_2(\eta, \xi)$ ise, *çift değişkenli arktanjan* işlevidir. Çözümde özellikle bu işlevin kullanılmasının nedeni, θ açısını $\{-\pi < \theta < \pi\}$ aralığında tek bir değerle vermesidir. Bu işlevi tanımlayan özdeşlik ve bu işlevin bazı özellikleri ile verdiği açı değerleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\theta \equiv \text{atan}_2(r \sin \theta, r \cos \theta); \quad r > 0 \quad (1.5.10)$$

$$\text{atan}_2(-\eta, \xi) = -\text{atan}_2(\eta, \xi) \quad (1.5.11)$$

$$\text{atan}_2(\eta, -\xi) \neq -\text{atan}_2(\eta, \xi) \quad (\text{dikkat!}) \quad (1.5.12)$$

$$\text{atan}_2(\eta, -\xi) = [\pi - \text{atan}_2(\eta, \xi)] \text{sgn}(\eta) \quad (1.5.13)$$

Eğer $\xi \neq 0$ ve $\eta \neq 0$ ise, önce aşağıdaki *temel (minimal)* açı bulunur.

$$\theta^\circ = \text{atan}_2(|\eta|, |\xi|) = \tan^{-1}(|\eta/\xi|) \quad (1.5.14)$$

Bu temel açiya bağlı olarak $\theta = \text{atan}_2(\eta, \xi)$ açısı şöyle belirlenir.

$$\left. \begin{array}{l} \xi > 0, \eta > 0 \Rightarrow \theta = \theta^\circ \\ \xi < 0, \eta > 0 \Rightarrow \theta = \pi - \theta^\circ \\ \xi < 0, \eta < 0 \Rightarrow \theta = \theta^\circ - \pi \\ \xi > 0, \eta < 0 \Rightarrow \theta = -\theta^\circ \end{array} \right\} \quad (1.5.15)$$

Eğer ξ ve η değişkenlerinden biri ya da her ikisi birden sıfırsa, aşağıdaki özel durumlar ortaya çıkar.

$$\left. \begin{array}{l} \xi = 0, \eta \neq 0 \Rightarrow \theta = (\pi/2) \text{sgn}(\eta) \\ \xi > 0, \eta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ \xi < 0, \eta = 0 \Rightarrow \theta = \pm \pi \\ \xi = 0, \eta = 0 \Rightarrow \theta = ? \end{array} \right\} \quad (1.5.16)$$

Görüldüğü gibi, $\xi < 0$ ve $\eta = 0$ olan özel durumda, θ açısında bir *işaret belirsizliği* ortaya çıkar. Bunun da ötesinde, $\xi = \eta = 0$ olan çok özel durumda, $\text{atan}_2(\eta, \xi)$ işlevi *tekilleşir*. Bu özel durumda ise, θ açısı tümüyle belirsizleşir.

Tekrar esas konuya dönülecek olursa, θ açısı bulunduktan sonra, dönme eksenini temsil eden \vec{n} birim vektörünün bileşenleri, aşağıda açıklanan biçimlerde bulunur.

(a) $\sin \theta \neq 0$ olma durumu:

Bu durumda, (1.5.5) ve (1.5.6) denklem grupları birlikte kullanılarak \vec{n} vektörünün bileşenleri şöyle bulunur.

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= (r_{32} - r_{23})/(2 \sin \theta) = \sigma(r_{32} - r_{23})/(2\sqrt{1 - \xi^2}) \\ n_2 &= (r_{13} - r_{31})/(2 \sin \theta) = \sigma(r_{13} - r_{31})/(2\sqrt{1 - \xi^2}) \\ n_3 &= (r_{21} - r_{12})/(2 \sin \theta) = \sigma(r_{21} - r_{12})/(2\sqrt{1 - \xi^2}) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.17)$$

(1.5.9) ve (1.5.17) denklemlerinden işaret değişkeni σ hakkında şu sonuçlar çıkartılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \sigma = +1 &\Rightarrow \theta \text{ ve } \vec{n} \\ \sigma = -1 &\Rightarrow \theta' = -\theta \text{ ve } \vec{n}' = -\vec{n} \end{aligned} \right\} \quad (1.5.18)$$

Fakat, yukarıdaki iki çözüm tamamen eşdeğerlidir, çünkü

$$e^{\vec{n}\theta} = e^{(-\vec{n})(-\theta)} \quad (1.5.19)$$

Dolayısıyla, genelliği bozmaksızın, $\sigma = +1$ değeri seçilebilir.

(b) $\sin \theta = 0$ olma durumu:

Bu durumun aşağıda açıklanan iki biçimi vardır.

Birinci durumda, ya hiç dönme olmamıştır ($\theta = 0$), ya da *tam tur dönme* ($\theta = \pm 2\pi$) olmuştur. Her iki durumda da, \vec{n} eksen vektörü ne olursa olsun, $\hat{R} = \hat{I}$ olur. Dolayısıyla, \vec{n} belirlenemez.

İkinci durumda ise, *yarım tur dönme* ($\theta = \pm\pi$) olmuştur. Bu durumda, \vec{n} belirlenebilir. Ancak, hâlâ $\sin \theta = 0$ olduğu için (1.5.17) denklem grubu bu amaçla kullanılamaz. Bu amaçla, (1.5.4), (1.5.5) ve (1.5.6) denklem gruplarının $\theta = \pm\pi$ için aşağıdaki indirgenmiş biçimleri kullanılabilir.

$$\left. \begin{aligned} r_{11} &= 2n_1^2 - 1 \\ r_{22} &= 2n_2^2 - 1 \\ r_{33} &= 2n_3^2 - 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.5.20)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{12} &= r_{21} = 2n_1n_2 \\ r_{23} &= r_{32} = 2n_2n_3 \\ r_{31} &= r_{13} = 2n_3n_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.5.21)$$

(1.5.20) denklem grubu, \vec{n} vektörünün bileşenlerini, üç farklı işaret değişkeniyle, şöyle verir.

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \sigma_1 \sqrt{(1 + r_{11})/2}; \quad \sigma_1 = \pm 1 \\ n_2 &= \sigma_2 \sqrt{(1 + r_{22})/2}; \quad \sigma_2 = \pm 1 \\ n_3 &= \sigma_3 \sqrt{(1 + r_{33})/2}; \quad \sigma_3 = \pm 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.5.22)$$

Fakat, bu arada, (1.5.21) denklem grubu da sağlanmalıdır. Bu koşul, aşağıdaki işaret değişkeni ilişkilerine yol açar.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 &= \text{sgn}(r_{12}) \\ \sigma_2\sigma_3 &= \text{sgn}(r_{23}) \\ \sigma_3\sigma_1 &= \text{sgn}(r_{31}) \end{aligned} \right\} \quad (1.5.23)$$

Eğer \vec{n} vektörünün bileşenlerinden hiç biri sıfır değilse, (1.5.23) denkleminin işaret değişkenleri için çözümü, σ' gibi tek bir işaret değişkenine bağlı olarak şöyle elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma' \operatorname{sgn}(r_{23}) \\ \sigma_2 &= \sigma' \operatorname{sgn}(r_{31}) \\ \sigma_3 &= \sigma' \operatorname{sgn}(r_{12}) \end{aligned} \right\}; \sigma' = \pm 1 \quad (1.5.24)$$

Eğer \vec{n} vektörünün bileşenlerinden yalnızca biri sıfırsa, örneğin $n_3 = 0$ ise, (1.5.23) denklem grubunda kullanılacak bir tek denklem kalır, onun da σ_1 ve σ_2 işaret değişkenleri için çözümü şöyle olur.

$$\sigma_1 \sigma_2 = \operatorname{sgn}(r_{12}) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma', \sigma_2 = \sigma' \operatorname{sgn}(r_{12}); \sigma' = \pm 1 \quad (1.5.25)$$

Eğer \vec{n} vektörünün bileşenlerinden ikisi birden sıfırsa, örneğin $n_1 = n_2 = 0$ ise, (1.5.23) denklem grubunda kullanılacak denklem kalmaz. Fakat, geriye kalan tek bileşen (n_3), \vec{n} birim vektör olduğu için, herhangi bir denkleme ihtiyaç kalmadan şöyle bulunur.

$$n_3 = \sigma' = \pm 1 \quad (1.5.26)$$

Görüldüğü gibi, $\theta = \pm\pi$ iken de, \vec{n} vektörünün bileşenleri, tek bir işaret değişkenine ($\sigma' = \pm 1$) bağlı olarak bulunmuştur. Bu işaret değişken için de, genelliği bozmaksızın, $\sigma' = +1$ değeri seçilebilir. Çünkü,

$$e^{\vec{n}\pi} = e^{\vec{n}(-\pi)} = e^{(-\vec{n})\pi} = e^{(-\vec{n})(-\pi)} \quad (1.5.27)$$

Örnek 1.5.1:

Örnek 1.4.1'deki iki adımlı dönme şeması aşağıda tekrar gösterilmiştir.

$$\vec{p} = \vec{u}_1^{(a)} \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_2^{(a)}, \theta]} \vec{q} \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_3^{(a)}, \psi]} \vec{r} \quad (1.5.28)$$

Anımsanacağı üzere, \vec{p} vektörünü \vec{r} vektörüne döndüren toplam dönme matrisi şöyle elde edilmiştir.

$$\hat{R} = \hat{R}_3(\psi)\hat{R}_2(\theta) = e^{\vec{u}_3\psi}e^{\vec{u}_2\theta} \quad (1.5.29)$$

Şimdiki örnek için dönme açıları, $\psi = 60^\circ$ ve $\theta = 45^\circ$ olarak veriliyor. Bu durumda, toplam dönmeyi tek adımda gerçekleştiren ϕ açısı ile dönme eksenini belirten \vec{n} birim vektörünün \mathcal{F}_a eksen takımındaki bileşenleri aşağıda gösterilen biçimde bulunur.

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \hat{R} &= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 \\ 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.707 & 0 & 0.707 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \hat{R} &= \begin{bmatrix} 0.3535 & -0.866 & 0.3535 \\ 0.6123 & 0.5 & 0.6123 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \end{bmatrix} = e^{\vec{n}\phi} \end{aligned} \quad (1.5.30)$$

Önce, (1.5.7) – (1.5.9) denklemleri ve $\sigma = +1$ değeri kullanılarak ϕ açısı bulunur.

$$\begin{aligned}\cos \phi &= (0.3535 + 0.5 + 0.707 - 1)/2 = 0.2803 \Rightarrow \\ \sin \phi &= \sqrt{1 - (0.2803)^2} = 0.9599 \Rightarrow \\ \phi &= \text{atan}_2(0.9599, 0.2803) = 73.72^\circ\end{aligned}\quad (1.5.31)$$

Daha sonra, $\sin \phi \neq 0$ olduğuna göre, (1.5.17) denklem grubu kullanılarak \vec{n} eksen vektörü, \mathcal{F}_a eksen takımındaki bileşenleri ile birlikte bulunur.

$$\begin{aligned}n_1 &= (0 - 0.6123)/1.9198 = -0.3189 \\ n_2 &= (0.3535 + 0.707)/1.9198 = 0.5524 \\ n_3 &= (0.6123 + 0.866)/1.9198 = 0.7700\end{aligned}\quad \left. \vphantom{\begin{aligned}n_1 \\ n_2 \\ n_3\end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$

$$\vec{n} = -\vec{u}_1^{(a)}(0.3189) + \vec{u}_2^{(a)}(0.5524) + \vec{u}_3^{(a)}(0.7700) \quad (1.5.32)$$

1.6. Bir Vektörün Değişik Eksen Takımlarındaki Matris Gösterimleri ve Eksen Takımları Arasındaki Dönüşüm Matrisleri

Herhangi bir \vec{r} vektörü, \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b gibi iki farklı eksen takımında çözüştürülebilir. Şöyle ki,

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)}r_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)}r_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)}r_3^{(a)} = \vec{u}_1^{(b)}r_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)}r_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)}r_3^{(b)} \quad (1.6.1)$$

(1.6.1) denklemindeki bileşenler, $k = 1, 2, 3$ için şöyle tanımlanmıştır.

$$r_k^{(a)} = \vec{r} \cdot \vec{u}_k^{(a)}, \quad r_k^{(b)} = \vec{r} \cdot \vec{u}_k^{(b)} \quad (1.6.2)$$

Söz konusu bileşenler kullanılarak aşağıdaki dikeysıra matrisleri oluşturulabilir.

$$\vec{r}^{(a)} = [\vec{r}]^{(a)} = [\vec{r}]|_{\mathcal{F}_a} = \begin{bmatrix} r_1^{(a)} \\ r_2^{(a)} \\ r_3^{(a)} \end{bmatrix} \quad (1.6.3)$$

$$\vec{r}^{(b)} = [\vec{r}]^{(b)} = [\vec{r}]|_{\mathcal{F}_b} = \begin{bmatrix} r_1^{(b)} \\ r_2^{(b)} \\ r_3^{(b)} \end{bmatrix} \quad (1.6.4)$$

Yukarıdaki $\vec{r}^{(a)}$ ve $\vec{r}^{(b)}$ dikeysıra matrisleri, aynı \vec{r} vektörünün \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b eksen takımlarındaki matris gösterimleridir. Eğer \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b çakışık ya da eş yönlü paralel değillerse, $\vec{r}^{(a)}$ ve $\vec{r}^{(b)}$, iki farklı dikeysıra matrisi olarak ortaya çıkar. Yani, genelde,

$$\vec{r}^{(a)} \neq \vec{r}^{(b)} \quad (1.6.5)$$

Bununla birlikte, $\vec{r}^{(a)}$ ve $\vec{r}^{(b)}$ arasında, aynı \vec{r} vektörünü temsil ettikleri için, bir ilişki vardır. Bu ilişki, şöyle ifade edilebilir.

$$\vec{r}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)}\vec{r}^{(b)} \quad (1.6.6)$$

(1.6.6) denkleminde görülen $\hat{C}^{(a,b)}$, *bileşen dönüşüm matrisi*, ya da kısaca, *dönüşüm matrisi* olarak adlandırılır. Aynı denkleme göre, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisi, \vec{r} vektörünün \mathcal{F}_b eksen takımındaki bileşenlerini \mathcal{F}_a eksen takımındaki bileşenlerine dönüştürmektedir.

Öte yandan, (1.6.6) denklemi, a ile b simgelerinin yerdeğişimiyle, şöyle de yazılabilir.

$$\bar{r}^{(b)} = \hat{C}^{(b,a)}\bar{r}^{(a)} \Rightarrow \bar{r}^{(a)} = [\hat{C}^{(b,a)}]^{-1}\bar{r}^{(b)} \quad (1.6.7)$$

(1.6.6) ve (1.6.7) denklemleri karşılaştırılınca, şu sonuca varılır.

$$[\hat{C}^{(b,a)}]^{-1} = \hat{C}^{(a,b)} \Leftrightarrow [\hat{C}^{(a,b)}]^{-1} = \hat{C}^{(b,a)} \quad (1.6.8)$$

Dönüşüm matrisinin bir diğer önemli özelliği de aşağıda gösterilmiştir.

Normal olarak, belli bir kinematik inceleme sürecinde göz önüne alınan eksen takımlarının tümünün eksenlerinde aynı ölçek kullanılır. Buna göre, gözlemlenen \vec{r} vektörünün büyüklüğü tüm eksen takımlarında aynı görünür. Bu olgu, \vec{r} vektörünün \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b eksen takımlarındaki matris gösterimleri için şöyle ifade edilir.

$$r^2 = |\vec{r}|^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = \bar{r}^{(a)t}\bar{r}^{(a)} = \bar{r}^{(b)t}\bar{r}^{(b)} \quad (1.6.9)$$

(1.6.9) denklemi, (1.6.6) denklemi kullanılarak şöyle yazılabilir.

$$[\hat{C}^{(a,b)}\bar{r}^{(b)}]t[\hat{C}^{(a,b)}\bar{r}^{(b)}] = \bar{r}^{(b)t}[\hat{C}^{(a,b)t}\hat{C}^{(a,b)}]\bar{r}^{(b)} = \bar{r}^{(b)t}\bar{r}^{(b)} \quad (1.6.10)$$

(1.6.10) denklemden şu sonuç çıkar.

$$\hat{C}^{(a,b)t}\hat{C}^{(a,b)} = \hat{I} \Rightarrow \hat{C}^{(a,b)t} = [\hat{C}^{(a,b)}]^{-1} \quad (1.6.11)$$

(1.6.11) ve (1.6.8) denklemlerinden çıkan sonuç ise aşağıdaki özelliştir.

$$\hat{C}^{(b,a)} = [\hat{C}^{(a,b)}]^{-1} = \hat{C}^{(a,b)t} \quad (1.6.12)$$

Görüldüğü gibi, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin tersi, devriğine (transpozuna) eşittir. Diğer bir deyişle, $\hat{C}^{(a,b)}$ *ortonormal* bir matristir.

1.7. Dönüşüm Matrisinin Temel Birim Vektörler Cinsinden İfade Edilmesi

\mathcal{F}_b eksen takımının temel birim vektörleri, $k = 1, 2, 3$ için, \mathcal{F}_a eksen takımında aşağıdaki dikeysıra matrisleri biçiminde gösterilebilir.

$$\bar{u}_k^{(b/a)} = [\bar{u}_k^{(b)}]^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)}[\bar{u}_k^{(b)}]^{(b)} = \hat{C}^{(a,b)}\bar{u}_k^{(b/b)} = \hat{C}^{(a,b)}\bar{u}_k \quad (1.7.1)$$

(1.7.1) denklemindeki \bar{u}_k artçıparanı, çarpılan matrisin k -yinci dikeysirasını seçip alır. Buna göre, $\bar{u}_k^{(b/a)}$ dikeysıra matrisi, $\hat{C}^{(a,b)}$ kare matrisinin k -yinci dikeysirasını oluşturur. Dolayısıyla, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisi, aşağıdaki dikey sıra ayrıntısıyla ifade edilebilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = [\bar{u}_1^{(b/a)} \quad \bar{u}_2^{(b/a)} \quad \bar{u}_3^{(b/a)}] \quad (1.7.2)$$

Öte yandan, (1.7.1) denklemden, a ve b indislerinin yeri değiştirilerek ve (1.6.12) denklemi kullanılarak şu ilişkiler elde edilir.

$$\bar{u}_k^{(a/b)} = \hat{C}^{(b,a)}\bar{u}_k \Rightarrow \bar{u}_k^{(a/b)t} = \bar{u}_k^t\hat{C}^{(b,a)t} = \bar{u}_k^t\hat{C}^{(a,b)} \quad (1.7.3)$$

(1.7.3) denklemindeki \bar{u}_k^t önçarıparanı ise, çarpılan matrisin k -yinci yataysirasını seçip alır. Buna göre, (1.7.3) denklemden şu sonuç çıkar.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(a/b)t} \\ \bar{u}_2^{(a/b)t} \\ \bar{u}_3^{(a/b)t} \end{bmatrix} \quad (1.7.4)$$

NOT-1: (1.7.4) denklemindeki yataysıra matrislerinin üstyazıtları ile (1.7.2) denklemdeki dikeysıra matrislerinin üstyazıtları arasındaki fark, gözden kaçırılmamalıdır.

NOT-2: (1.7.2) denkleminden görüldüğü üzere, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin dikey sıraları, birbirine dik birim vektörlerin matris gösterimlerinden oluşmaktadır. Dolayısıyla, daha önce de değinildiği gibi, $\hat{C}^{(a,b)}$ *ortonormal* bir matristir. $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin bu özelliği, dikey sıraları kısaca $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ ile gösterilerek, aşağıdaki *altı ortonormalite denklemi* ile ifade edilebilir.

$$\bar{c}_1^t \bar{c}_1 = 1, \bar{c}_2^t \bar{c}_2 = 1, \bar{c}_3^t \bar{c}_3 = 1; \bar{c}_1^t \bar{c}_2 = 0, \bar{c}_2^t \bar{c}_3 = 0, \bar{c}_3^t \bar{c}_1 = 0 \quad (1.7.5)$$

Ayrıca, (1.7.4) denkleminden görüldüğü üzere, benzer özellik $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin yatay sıraları için de geçerlidir.

Yukarıdaki altı ortonormalite denklemi nedeniyle, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin dokuz elemanının tümü, yalnızca *üç bağımsız parametre* cinsinden ifade edilebilir.

Örneğin, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin yalnızca üç diyagonal elemanı belirtilirse, diğer altı elemanı, (1.7.5) denklem kümesi aracılığıyla, belirtilen üç diyagonal elemana bağlı olarak bulunabilir.

NOT-3: Yine (1.7.2) denkleminden görüldüğü üzere, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin oluşumunda rol alan birim vektörler, aynı zamanda *sağ elli* bir küme oluşturmaktadırlar. Dolayısıyla, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin dikey sıraları arasında, ortonormalite ilişkilerine ek olarak, şu üç ilişki de vardır.

$$\bar{c}_1 \bar{c}_2 = \bar{c}_3, \bar{c}_2 \bar{c}_3 = \bar{c}_1, \bar{c}_3 \bar{c}_1 = \bar{c}_2 \quad (1.7.6)$$

Örneğin, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin ilk iki dikey sırası, yani \bar{c}_1 ve \bar{c}_2 , her hangi bir biçimde zaten belirlenmiş durumdaysa, üçüncü dikey sıra, ek bir çözüm çabasına gerek kalmaksızın, $\bar{c}_3 = \bar{c}_1 \bar{c}_2$ biçiminde belirlenmiş olur.

Bu özelliğin benzeri, (1.7.4) denkleminde göre, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin yatay sıraları için de geçerlidir.

Örnek 1.7.1:

\mathcal{F}_b eksen takımının temel birim vektörleri, \mathcal{F}_a eksen takımında aşağıda görüldüğü gibi ifade edilmişlerdir.

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1^{(b)} &= +\bar{u}_1^{(a)}(0.48) + \bar{u}_2^{(a)}(0.64) + \bar{u}_3^{(a)}(0.60) \\ \bar{u}_2^{(b)} &= -\bar{u}_1^{(a)}(0.80) + \bar{u}_2^{(a)}(0.60) \\ \bar{u}_3^{(b)} &= -\bar{u}_1^{(a)}(0.36) - \bar{u}_2^{(a)}(0.48) + \bar{u}_3^{(a)}(0.80) \end{aligned} \right\} \quad (1.7.7)$$

Bu durumda, $k = 1, 2, 3$ için, $\bar{u}_k^{(b/a)}$ dikeysıra matrisleri şöyle elde edilir.

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^{(b/a)} &= +\bar{u}_1^{(a/a)}(0.48) + \bar{u}_2^{(a/a)}(0.64) + \bar{u}_3^{(a/a)}(0.60) \Rightarrow \\ \bar{u}_1^{(b/a)} &= +\bar{u}_1(0.48) + \bar{u}_2(0.64) + \bar{u}_3(0.60) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\bar{u}_1^{(b/a)} = + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0.48) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (0.64) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (0.60) = \begin{bmatrix} 0.48 \\ 0.64 \\ 0.60 \end{bmatrix} \quad (1.7.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_2^{(b/a)} &= -\bar{u}_1^{(a/a)}(0.80) + \bar{u}_2^{(a/a)}(0.60) \Rightarrow \\ \bar{u}_2^{(b/a)} &= -\bar{u}_1(0.80) + \bar{u}_2(0.60) \Rightarrow \\ \bar{u}_2^{(b/a)} &= - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0.80) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (0.60) = \begin{bmatrix} -0.80 \\ +0.60 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_3^{(b/a)} &= -\bar{u}_1^{(a/a)}(0.36) - \bar{u}_2^{(a/a)}(0.48) + \bar{u}_3^{(a/a)}(0.80) \Rightarrow \\ \bar{u}_3^{(b/a)} &= -\bar{u}_1(0.36) - \bar{u}_2(0.48) + \bar{u}_3(0.80) \Rightarrow \\ \bar{u}_3^{(b/a)} &= - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0.36) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (0.48) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (0.80) = \begin{bmatrix} -0.36 \\ -0.48 \\ 0.80 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

Yukarıdaki dikeysıra matrisleri, (1.7.2) denkleme göre yan yana dizilince de, $\hat{C}^{(a,b)}$ dönüşüm matrisi, aşağıda görüldüğü gibi elde edilmiş olur.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} 0.48 & -0.80 & -0.36 \\ 0.64 & 0.60 & -0.48 \\ 0.60 & 0 & 0.80 \end{bmatrix} \quad (1.7.11)$$

Örnek 1.7.2:

$\hat{C}^{(a,b)}$ dönüşüm matrisinin ilk iki dikey sırası şöyle belirtilmiştir.

$$\bar{c}_1 = \begin{bmatrix} 0.48 \\ 0.64 \\ 0.60 \end{bmatrix}, \quad \bar{c}_2 = \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.48 \\ -0.80 \end{bmatrix} \quad (1.7.12)$$

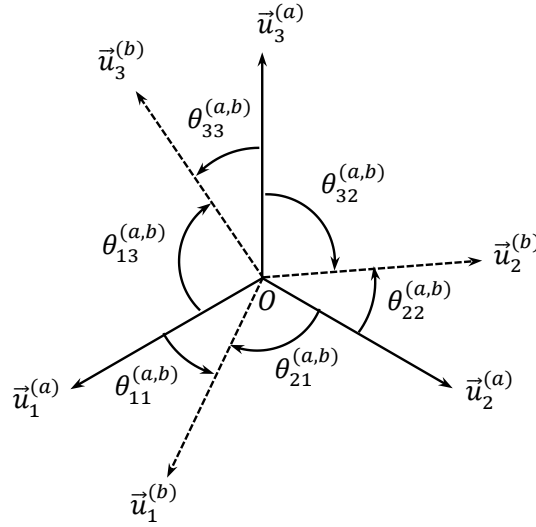
Bu bilgilerle, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin üçüncü dikey sırası, (1.7.6) denklemindeki özellik kullanılarak şöyle belirlenir.

$$\bar{c}_3 = \tilde{c}_1 \bar{c}_2 \Rightarrow \bar{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -0.60 & 0.64 \\ 0.60 & 0 & -0.48 \\ -0.64 & 0.48 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.36 \\ 0.48 \\ -0.80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.80 \\ 0.60 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.7.13)$$

Böylece, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisi de belirlenmiş olur. Şöyle ki,

$$\hat{C}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.36 & -0.80 \\ 0.64 & 0.48 & 0.60 \\ 0.60 & -0.80 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.7.14)$$

1.8. Dönüşüm Matrisinin Yönelim Kosinüsleri Matrisi Olarak İfade Edilmesi



Şekil 1.3. İki Eksen Takımı Arasındaki Yönelim Açılı

\mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b eksen takımlarının temel birim vektörleri arasındaki açılar, *yönelim açıları* olarak tanımlanırlar. Tümü dokuz adet olan yönelim açılarının altısı Şekil 1.3'te gösterilmiştir. Yönelim açıları, \mathcal{F}_b eksen takımının \mathcal{F}_a eksen takımına göre yönelimini ifade etmek üzere şöyle tanımlanırlar.

$$\theta_{ij}^{(a,b)} = \sphericalangle[\vec{u}_i^{(a)} \rightarrow \vec{u}_j^{(b)}] \quad (1.8.1)$$

Yönelim açılarının kosinüsleri ise, *yönelim kosinüsleri* olarak aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

$$c_{ij}^{(a,b)} = \cos \theta_{ij}^{(a,b)} \quad (1.8.2)$$

Yönelim kosinüslerinden $c_{ij}^{(a,b)}$, $\vec{u}_i^{(a)}$ ile $\vec{u}_j^{(b)}$ birim vektörleri cinsinden şöyle ifade edilir.

$$c_{ij}^{(a,b)} = \vec{u}_i^{(a)} \cdot \vec{u}_j^{(b)} \quad (1.8.3)$$

(1.8.3) denklemi, ilgili vektörlerin \mathcal{F}_a eksen takımındaki matris gösterimleri kullanılarak şöyle de yazılabilir.

$$c_{ij}^{(a,b)} = \vec{u}_i^{(a/a)t} \vec{u}_j^{(b/a)} = \vec{u}_i^t \vec{u}_j^{(b/a)} \quad (1.8.4)$$

(1.8.4) denklemi ise, (1.7.1) denklemi sayesinde şöyle yazılabilir.

$$c_{ij}^{(a,b)} = \vec{u}_i^t \hat{C}^{(a,b)} \vec{u}_j^{(b/b)} = \vec{u}_i^t \hat{C}^{(a,b)} \vec{u}_j \quad (1.8.5)$$

(1.8.5) denkleminde, \vec{u}_i^t ile \vec{u}_j çarpanları, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin i -yinci yatay sırası ile j -yinci dikey sırasında yer alan elemanı seçip alırlar. Dolayısıyla, $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisi, yönelim kosinüsleri cinsinden aşağıda gösterilen ayrıntıyla ifade edilebilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} c_{11}^{(a,b)} & c_{12}^{(a,b)} & c_{13}^{(a,b)} \\ c_{21}^{(a,b)} & c_{22}^{(a,b)} & c_{23}^{(a,b)} \\ c_{31}^{(a,b)} & c_{32}^{(a,b)} & c_{33}^{(a,b)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta_{11}^{(a,b)} & c\theta_{12}^{(a,b)} & c\theta_{13}^{(a,b)} \\ c\theta_{21}^{(a,b)} & c\theta_{22}^{(a,b)} & c\theta_{23}^{(a,b)} \\ c\theta_{31}^{(a,b)} & c\theta_{32}^{(a,b)} & c\theta_{33}^{(a,b)} \end{bmatrix} \quad (1.8.6)$$

Yönelim açılarından eş indisli olan üçü, yani $\theta_{11}^{(a,b)}$, $\theta_{22}^{(a,b)}$, $\theta_{33}^{(a,b)}$ açıları, *birincil yönelim açıları*, diğerleri ise *ikincil yönelim açıları* olarak adlandırılırlar. $\hat{C}^{(a,b)}$ matrisinin *diyagonal elemanları* ise, birincil yönelim açılarının kosinüsleridir. Dolayısıyla, *birincil yönelim kosinüsleri* olarak adlandırılırlar. Diğer elemanlar ise, ikincil yönelim kosinüsleridir.

Öte yandan, daha önce de belirtildiği gibi, $\hat{C}^{(a,b)}$ ortonormal bir matristir. Dolayısıyla, tüm elemanları, üç bağımsız parametreye bağlı olarak belirlenebilir. Yönelim açıları ve kosinüsleri bağlamında, bu üç bağımsız parametre, genellikle, ya *birincil yönelim açıları* ya da *birincil yönelim kosinüsleri* olarak alınır.

Örnek 1.8.1:

$\hat{C}^{(a,b)} = \hat{C}$ gibi bir yönelim kosinüsleri matrisine ait *birincil yönelim kosinüsleri*, aşağıdaki değerlerle verilmiştir.

$$c_{11} = 0.48, c_{22} = 0.60, c_{33} = 0.80 \quad (1.8.7)$$

Bu değerlere karşılık gelen *birincil yönelim açıları* ise şunlardır.

$$\theta_{11} = 61.314^\circ, \theta_{22} = 53.13^\circ, \theta_{33} = 36.87^\circ \quad (1.8.8)$$

Bu bilgilerden yola çıkılarak \hat{C} matrisi, aşağıda anlatılan biçimde oluşturulabilir.

Şekil 1.3'te görüldüğü üzere, \mathcal{F}_b eksen takımı, \mathcal{F}_a eksen takımı döndürülerek elde edilmiştir. Bu nedenle, $\hat{C} = \hat{C}^{(a,b)}$ matrisi, aşağıda ifade edildiği gibi, bir dönme matrisi olarak ele alınabilir.

$$\hat{C} = e^{\tilde{n}\theta} = \hat{I} \cos \theta + \tilde{n} \sin \theta + \tilde{n}\tilde{n}^t (1 - \cos \theta) \quad (1.8.9)$$

(1.8.9) denklemdeki θ açısı, üç birincil yönelim açısının bileşkesidir; $\tilde{n} = [\tilde{n}]^{(a)}$ ise söz konusu dönmenin eksenini göstermektedir.

Daha önce Kısım 1.5'te görülen (1.5.7) – (1.5.9) denklemleri $\sigma = +1$ seçimi kullanılarak θ açısı şöyle bulunur.

$$\cos \theta = (0.48 + 0.6 + 0.8 - 1)/2 = 0.44 \quad (1.8.10)$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - (0.44)^2} = 0.898 \quad (1.8.11)$$

$$\theta = \text{atan}_2(0.898, 0.44) = 63.9^\circ \quad (1.8.12)$$

θ açısı ve $\cos \theta$ bulunduktan sonra, \tilde{n} vektörünün bileşenleri, yine Kısım 1.5'te görülen (1.5.4) denklem grubundan üç bağımsız işaret değişkeni eşliğinde $k = 1, 2, 3$ için şöyle bulunur.

$$\begin{aligned} c_{kk} &= \cos \theta + n_k^2 (1 - \cos \theta) \Rightarrow \\ n_k &= \sigma_k \sqrt{(c_{kk} - \cos \theta) / (1 - \cos \theta)} \Rightarrow \\ \left. \begin{aligned} n_1 &= \sigma_1 (0.2673); \sigma_1 = \pm 1 \\ n_2 &= \sigma_2 (0.5345); \sigma_2 = \pm 1 \\ n_3 &= \sigma_3 (0.8018); \sigma_3 = \pm 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.8.13) \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, üç bağımsız işaret değişkeni nedeniyle, \tilde{n} vektörü için ve dolayısıyla \hat{C} matrisi için sekiz değişik çözüm bulunmuştur. Bu sekiz çözümden her biri, \mathcal{F}_a eksen takımının *oktantlarından* (1/8'lik uzay bölgelerinden) biri içinde yer alır.

Oktantlar, bir vektörün bileşenlerinin işaretlerine göre şöyle tanımlanırlar.

Oktant 1: (+ + +), Oktant 2: (- + +), Oktant 3: (- - +), Oktant 4: (+ - +)

Oktant 5: (+ + -), Oktant 6: (- + -), Oktant 7: (- - -), Oktant 8: (+ - -)

İşaret değişkenlerinin $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = +1$ seçimiyle yani \vec{n} vektörünün birinci oktant içinde seçilmesiyle ve (1.8.9) denklemi kullanılarak, $\hat{C} = \hat{C}^{(a,b)}$ matrisi şöyle elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (0.44) + \begin{bmatrix} 0 & -0.8018 & 0.5345 \\ 0.8018 & 0 & -0.2673 \\ -0.5345 & 0.2673 & 0 \end{bmatrix} (0.898) \\ &+ \begin{bmatrix} 0.07145 & 0.1429 & 0.2143 \\ 0.1429 & 0.2857 & 0.4286 \\ 0.2143 & 0.4286 & 0.6429 \end{bmatrix} (0.56) \Rightarrow \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} 0.48 & -0.64 & 0.60 \\ 0.80 & 0.60 & 0 \\ -0.36 & 0.48 & 0.80 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.8.14)$$

1.9. Dönüşüm Matrisinin Dönme Matrisi Olarak İfade Edilmesi

Yönelimsel olarak bakıldığında, \mathcal{F}_b eksen takımı, \mathcal{F}_a eksen takımının belli bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilebilir. Bu durum, şematik olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\mathcal{F}_a \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{n},\theta]} \mathcal{F}_b \quad (1.9.1)$$

Bu şemaya özgü olarak, \mathcal{F}_a eksen takımına *dönme öncesi (pre-rotation)* eksen takımı, \mathcal{F}_b eksen takımına ise *dönme sonrası (post-rotation)* eksen takımı denir.

Doğal olarak iki eksen takımının temel vektörleri de, $k = 1, 2, 3$ için, aşağıda gösterildiği gibi aynı dönme ilişkisi içinde olurlar.

$$\vec{u}_k^{(a)} \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{n},\theta]} \vec{u}_k^{(b)} \quad (1.9.2)$$

Yukarıdaki şematik gösterimi ifade etmek üzere, dönme işleminin \mathcal{F}_a eksen takımında gözlemlendiği varsayılarak, aşağıdaki matris denklemi yazılabilir.

$$\begin{aligned} [\vec{u}_k^{(b)}]^{(a)} &= \hat{R}(\vec{n}^{(a)}, \theta) [\vec{u}_k^{(a)}]^{(a)} \Rightarrow \\ \vec{u}_k^{(b/a)} &= e^{\vec{n}^{(a)}\theta} \vec{u}_k^{(a/a)} = e^{\vec{n}^{(a)}\theta} \vec{u}_k \end{aligned} \quad (1.9.3)$$

Öte yandan, $\vec{u}_k^{(b/a)}$, hatırlanacağı üzere, daha önceki (1.7.1) dönüşüm denklemi ile şöyle ifade edilmişti.

$$\begin{aligned} [\vec{u}_k^{(b)}]^{(a)} &= \hat{C}^{(a,b)} [\vec{u}_k^{(b)}]^{(b)} \Rightarrow \\ \vec{u}_k^{(b/a)} &= \hat{C}^{(a,b)} \vec{u}_k^{(b/b)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{u}_k \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

(1.9.3) ve (1.9.4) denklemleri, dönüşüm ve dönme matrislerinin, aşağıda ayrıca yazıldığı gibi, eşit olduklarını göstermektedir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \hat{R}(\vec{n}^{(a)}, \theta) = e^{\vec{n}^{(a)}\theta} \quad (1.9.5)$$

Yukarıdaki denklemlerde, \vec{n} vektörünün dönme öncesi \mathcal{F}_a eksen takımındaki matris gösterimi olan $\vec{n}^{(a)}$ kullanılmıştır. Aslında, \vec{n} vektörünün dönme sonrası \mathcal{F}_b eksen takımındaki matris gösterimi olan $\vec{n}^{(b)}$ de kullanılabilir. Bunun nedeni, \vec{n} vektörünün dönme eksenini üzerinde olmasından dolayı, dönme işleminden etkilenmemesi ve $\vec{n}^{(b)} = \vec{n}^{(a)}$ olmasıdır.

Bu özelliğin varlığı şöyle gösterilebilir.

$$\begin{aligned}\vec{n}^{(b)} &= \hat{C}^{(b,a)}\vec{n}^{(a)} ; \hat{C}^{(b,a)} = \hat{C}^{(a,b)t} = [e^{\vec{n}^{(a)}\theta}]^t = e^{-\vec{n}^{(a)}\theta} \Rightarrow \\ \vec{n}^{(b)} &= e^{-\vec{n}^{(a)}\theta}\vec{n}^{(a)} = \vec{n}^{(a)}\end{aligned}\quad (1.9.6)$$

Ne var ki, söz konusu dönme işlemi, \mathcal{F}_c gibi *yönelimi farklı* bir üçüncü eksen takımında gözlemlenirse, bu eşitlik kaybolur. Yani, $\mathcal{F}_c \nparallel \mathcal{F}_b \nparallel \mathcal{F}_a$ ise, ya da $\hat{C}^{(c,b)} \neq \hat{C}^{(c,a)} \neq \hat{I}$ ise, aşağıdaki eşitsizlikler ortaya çıkar.

$$\vec{n}^{(c)} = \hat{C}^{(c,b)}\vec{n}^{(b)} \neq \vec{n}^{(b)} , \vec{n}^{(c)} = \hat{C}^{(c,a)}\vec{n}^{(a)} \neq \vec{n}^{(a)} \quad (1.9.7)$$

Dolayısıyla, (1.9.5) denklemi kullanılırken, \vec{n} vektörünün ifade edildiği eksen takımının ya \mathcal{F}_a ya da \mathcal{F}_b olmasına dikkat etmek gerekir. Bu kritik husus, şöyle ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}\hat{C}^{(a,b)} &= \hat{R}(\vec{n}^{(a)}, \theta) = \hat{R}(\vec{n}^{(b)}, \theta) \neq \hat{R}(\vec{n}^{(c)}, \theta) \Rightarrow \\ \hat{C}^{(a,b)} &= e^{\vec{n}^{(a)}\theta} = e^{\vec{n}^{(b)}\theta} \neq e^{\vec{n}^{(c)}\theta}\end{aligned}\quad (1.9.8)$$

Öte yandan, eğer dönme matrisi, bir nedenle, farklı bir \mathcal{F}_c eksen takımında ifade edilmişse, dönme eksenini vektörünün ve dönme matrisinin \mathcal{F}_c 'deki ifadeleri, aşağıdaki *dönen eksen etrafında dönme formülleri* uyarınca, \mathcal{F}_a 'daki ifadelerine dönüştürülebilir. Tabii, \mathcal{F}_b 'deki ifadelerine de benzer bir biçimde dönüştürülebilir.

Dönen Eksen Etrafında Dönme Formülleri:

$$\vec{n}^{(a)} = \hat{C}^{(a,c)}\vec{n}^{(c)} \quad (1.9.9)$$

$$\vec{n}^{(a)} = \hat{C}^{(a,c)}\vec{n}^{(c)}\hat{C}^{(c,a)} \quad (1.9.10)$$

$$\hat{R}(\vec{n}^{(a)}, \theta) = \hat{C}^{(a,c)}\hat{R}(\vec{n}^{(c)}, \theta)\hat{C}^{(c,a)} \quad (1.9.11)$$

$$e^{\vec{n}^{(a)}\theta} = \hat{C}^{(a,c)}e^{\vec{n}^{(c)}\theta}\hat{C}^{(c,a)} \quad (1.9.12)$$

Örnek 1.9.1: Dönen Eksen Takımına Göre Yapılan Ardışık Dönmeler

Bu örnekte, *dönen eksen takımına göre* yapılan üç ardışık dönme, aşağıdaki şemayla gösterilmiştir. Bu tip dönmelerde, her dönme, bir önceki dönme sonucunda ortaya çıkan eksen takımının eksenlerinden bir etrafında yapılır.

$$\mathcal{F}_a \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_1^{(a)}, \theta_1]} \mathcal{F}_b \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_2^{(b)}, \theta_2]} \mathcal{F}_c \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_3^{(c)}, \theta_3]} \mathcal{F}_d \quad (1.9.13)$$

Bu şemaya ve (1.9.8) kuralına göre, $\hat{C}^{(a,d)}$ dönüşüm matrisi, aşağıda açıklanan biçimde oluşturulur.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \hat{R}(\vec{u}_1^{(a/a)}, \theta_1) = \hat{R}(\vec{u}_1, \theta_1) = e^{\vec{u}_1\theta_1} \quad (1.9.14)$$

$$\hat{C}^{(b,c)} = \hat{R}(\vec{u}_2^{(b/b)}, \theta_2) = \hat{R}(\vec{u}_2, \theta_2) = e^{\vec{u}_2\theta_2} \quad (1.9.15)$$

$$\hat{C}^{(c,d)} = \hat{R}(\vec{u}_3^{(c/c)}, \theta_3) = \hat{R}(\vec{u}_3, \theta_3) = e^{\vec{u}_3\theta_3} \quad (1.9.16)$$

$$\begin{aligned}\hat{C}^{(a,d)} &= \hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,c)} \hat{C}^{(c,d)} \Rightarrow \\ \hat{C}^{(a,d)} &= e^{\tilde{u}_1 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_3}\end{aligned}\quad (1.9.17)$$

Örnek 1.9.2: Başlangıç Eksen Takımına Göre Yapılan Ardışık Dönmeler

Bu örnekte ise, *başlangıç eksen takımına göre* yapılan üç ardışık dönme, aşağıdaki şemayla gösterilmiştir. Bu tip dönmelerde, adı üstünde, her dönme, ilk eksen takımının eksenlerinden bir etrafında yapılır.

$$\mathcal{F}_a \xrightarrow{\text{dönme}[\tilde{u}_1^{(a)}, \theta_1]} \mathcal{F}_m \xrightarrow{\text{dönme}[\tilde{u}_2^{(a)}, \theta_2]} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\text{dönme}[\tilde{u}_3^{(a)}, \theta_3]} \mathcal{F}_d \quad (1.9.18)$$

Bu şemaya ve yine (1.9.8) kuralına göre, $\hat{C}^{(a,d)}$ dönüşüm matrisi, (1.9.12) formülü de kullanılarak aşağıda açıklanan biçimde oluşturulur.

$$\hat{C}^{(a,m)} = \hat{R}(\tilde{u}_1^{(a/a)}, \theta_1) = \hat{R}(\tilde{u}_1, \theta_1) = e^{\tilde{u}_1 \theta_1} \quad (1.9.19)$$

$$\hat{C}^{(m,n)} = \hat{R}(\tilde{u}_2^{(a/m)}, \theta_2) = e^{\tilde{u}_2^{(a/m)} \theta_2} = \hat{C}^{(m,a)} e^{\tilde{u}_2^{(a/a)} \theta_2} \hat{C}^{(a,m)} \Rightarrow$$

$$\hat{C}^{(m,n)} = e^{-\tilde{u}_1 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_1 \theta_1} \quad (1.9.20)$$

$$\hat{C}^{(n,d)} = \hat{R}(\tilde{u}_3^{(a/n)}, \theta_3) = e^{\tilde{u}_3^{(a/n)} \theta_3} = \hat{C}^{(n,a)} e^{\tilde{u}_3^{(a/a)} \theta_3} \hat{C}^{(a,n)} \quad (1.9.21)$$

Bu arada,

$$\hat{C}^{(a,n)} = \hat{C}^{(a,m)} \hat{C}^{(m,n)} = (e^{\tilde{u}_1 \theta_1}) (e^{-\tilde{u}_1 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_1 \theta_1}) = e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_1 \theta_1} \quad (1.9.22)$$

Böylece,

$$\hat{C}^{(n,d)} = (e^{-\tilde{u}_1 \theta_1} e^{-\tilde{u}_2 \theta_2}) (e^{\tilde{u}_3 \theta_3}) (e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_1 \theta_1}) \quad (1.9.23)$$

$\hat{C}^{(a,d)}$ matrisine gelince,

$$\hat{C}^{(a,d)} = \hat{C}^{(a,m)} \hat{C}^{(m,n)} \hat{C}^{(n,d)} \Rightarrow$$

$$\hat{C}^{(a,d)} = (e^{\tilde{u}_1 \theta_1}) (e^{-\tilde{u}_1 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_1 \theta_1}) (e^{-\tilde{u}_1 \theta_1} e^{-\tilde{u}_2 \theta_2}) (e^{\tilde{u}_3 \theta_3}) (e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_1 \theta_1}) \Rightarrow$$

$$\hat{C}^{(a,d)} = e^{\tilde{u}_3 \theta_3} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_1 \theta_1} \quad (1.9.24)$$

NOT: Yukarıdaki iki örnekten şu önemli sonuçlar çıkmaktadır.

(1) *Dönen eksen takımına göre* yapılan ardışık dönmelerde, baştan-sona dönüşüm matrisi, dönme adımı matrislerinin *dönme sırasıyla aynı sırada* çarpılmasıyla elde edilir.

(2) *Başlangıç eksen takımına göre* yapılan ardışık dönmelerde, baştan-sona dönüşüm matrisi, dönme adımı matrislerinin *dönme sırasına göre ters sırada* çarpılmasıyla elde edilir.

1.10. Dönüşüm Matrisinin Euler Açılımları Cinsinden İfade Edilmesi

(1.6.12) denkleminde göre, $\hat{C}^{(a,b)}$ ortonormal bir matristir, yani tersi devriğine (transpozuna) eşittir. İşte bu nedenle, $\hat{C}^{(a,b)}$ yalnızca üç bağımsız parametre cinsinden ifade edilebilir. Euler açıları kullanıldığında, bu üç bağımsız parametre, önceden belirlenmiş eksenler etrafındaki dönmeleri gösteren birer açı olarak seçilmiş olur. Söz konusu eksenlerden her biri, geleneksel olarak, belli bir eksen takımının eksenlerinden biri olarak belirlenir.

Belirlenen eksnelere göre, çeşitli *Euler açısı sıralamaları* ortaya çıkar. Bu sıralamaları genel olarak temsil eden $i-j-k$ sıralamasına göre, \mathcal{F}_a eksen takımının \mathcal{F}_b eksen takımına dönüşü, aşağıda şematik olarak gösterilen üç adımlı ardışık dönme işlemiyle gerçekleştirilir.

$$\mathcal{F}_a \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_i^{(a)}, \phi_1]} \mathcal{F}_m \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_j^{(m)}, \phi_2]} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\text{dönme}[\vec{u}_k^{(n)}, \phi_3]} \mathcal{F}_b \quad (1.10.1)$$

Yukarıdaki şemada, \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b *terminal eksen takımları*, \mathcal{F}_m ve \mathcal{F}_n ise, *ara eksen takımları* olarak adlandırılır. Bu şemaya göre, $\hat{C}^{(a,b)}$ şöyle ifade edilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \hat{C}^{(a,m)} \hat{C}^{(m,n)} \hat{C}^{(n,b)} \quad (1.10.2)$$

(1.10.2) denklemindeki dönüşüm matrisleri, (1.9.5) denklemi uyarınca, birer dönme matrisi olarak şöyle ifade edilirler.

$$\hat{C}^{(a,m)} = e^{\vec{u}_i^{(a/a)} \phi_1} = e^{\vec{u}_i \phi_1} = \hat{R}_i(\phi_1) \quad (1.10.3)$$

$$\hat{C}^{(m,n)} = e^{\vec{u}_j^{(m/m)} \phi_2} = e^{\vec{u}_j \phi_2} = \hat{R}_j(\phi_2) \quad (1.10.4)$$

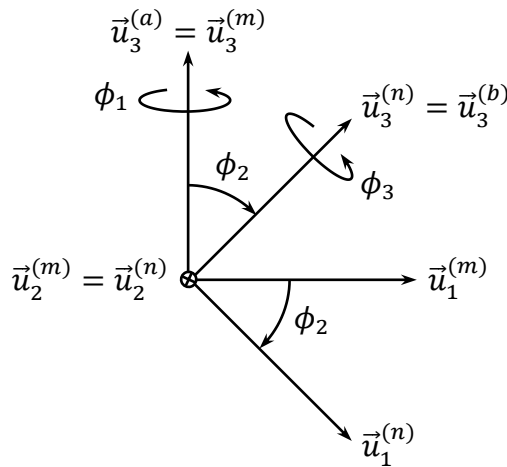
$$\hat{C}^{(n,b)} = e^{\vec{u}_k^{(n/n)} \phi_3} = e^{\vec{u}_k \phi_3} = \hat{R}_k(\phi_3) \quad (1.10.5)$$

Böylece, $\hat{C}^{(a,b)}$, aşağıda görülen biçimde elde edilmiş olur.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \hat{R}_i(\phi_1) \hat{R}_j(\phi_2) \hat{R}_k(\phi_3) = e^{\vec{u}_i \phi_1} e^{\vec{u}_j \phi_2} e^{\vec{u}_k \phi_3} \quad (1.10.6)$$

Euler açısı sıralamaları, $i = k \neq j$ ise *simetrik*, $i \neq j \neq k$ ise *asimetrik* olarak anılırlar. Robotik alanında genel olarak 1-2-3 ve 3-2-3 sıralamaları kullanılmaktadır. Araç dinamiği alanında ise, tüm kara, hava ve deniz araçlarını kapsamak üzere, neredeyse istisnasız olarak, 3-2-1 sıralaması kullanılmaktadır. Ne var ki, Euler'in bizzat öne sürüp kullandığı sıralama, 3-1-3 sıralamasıdır. Bu sıralama, daha çok, jiroskop rotorları ve kendi eksenleri etrafında dönen gök cisimleri gibi, simetrik olup simetri eksenini etrafında diğer eksenlere göre çok daha hızlı dönen cisimleri incelemek için kullanışlı olmaktadır. 3-1-3 sıralaması yerine, bazen, 3-2-3 sıralaması da kullanılabilir.

Örnek 1.10.1: Simetrik 3-2-3 Sıralaması



Şekil 1.4. Simetrik 3-2-3 Euler Açısı Sıralaması

Şekil 1.4'te gösterilen 3-2-3 sıralamasına göre, $\hat{C} = \hat{C}^{(a,b)}$ matrisi şöyle oluşur.

$$\hat{C} = \hat{R}_3(\phi_1)\hat{R}_2(\phi_2)\hat{R}_3(\phi_3) = e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{\tilde{u}_2\phi_2}e^{\tilde{u}_3\phi_3} \quad (1.10.7)$$

(1.10.7) denkleminin açılmış biçimi şöyledir.

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \begin{bmatrix} c\phi_1 & -s\phi_1 & 0 \\ s\phi_1 & c\phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi_2 & 0 & s\phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\phi_2 & 0 & c\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi_3 & -s\phi_3 & 0 \\ s\phi_3 & c\phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} c\phi_1c\phi_2c\phi_3 - s\phi_1s\phi_3 & -c\phi_1c\phi_2s\phi_3 - s\phi_1c\phi_3 & c\phi_1s\phi_2 \\ s\phi_1c\phi_2c\phi_3 + c\phi_1s\phi_3 & -s\phi_1c\phi_2s\phi_3 + c\phi_1c\phi_3 & s\phi_1s\phi_2 \\ -s\phi_2c\phi_3 & s\phi_2s\phi_3 & c\phi_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.10.8)$$

Simetrik olan 3-2-3 sıralamasına göre, verilen bir \hat{C} matrisinden Euler açıları aşağıda açıklanan biçimde elde edilirler.

ϕ_2 açısının bulunuşu:

$$\begin{aligned} c_{33} &= \bar{u}_3^t \hat{C} \bar{u}_3 = \bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\phi_2} e^{\tilde{u}_3\phi_3} \bar{u}_3 = \bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_2\phi_2} \bar{u}_3 \Rightarrow \\ c_{33} &= \bar{u}_3^t (\bar{u}_3 c\phi_2 + \bar{u}_1 s\phi_2) = c\phi_2 \Rightarrow \\ \cos \phi_2 &= c_{33} \Rightarrow \sin \phi_2 = \sigma \sqrt{1 - c_{33}^2}; \quad \sigma = \pm 1 \end{aligned} \quad (1.10.9)$$

$$\phi_2 = \text{atan}_2(\sigma \sqrt{1 - c_{33}^2}, c_{33}) = \sigma \text{atan}_2(\sqrt{1 - c_{33}^2}, c_{33}) \quad (1.10.10)$$

Dikkat edilirse, (1.10.10) denkleminde göre, $\sigma = \text{sgn}(\phi_2)$.

ϕ_1 açısının bulunuşu:

$$\begin{aligned} c_{13} &= \bar{u}_1^t \hat{C} \bar{u}_3 = \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\phi_2} e^{\tilde{u}_3\phi_3} \bar{u}_3 = \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\phi_2} \bar{u}_3 \Rightarrow \\ c_{13} &= (\bar{u}_1^t c\phi_1 - \bar{u}_2^t s\phi_1)(\bar{u}_3 c\phi_2 + \bar{u}_1 s\phi_2) = c\phi_1 s\phi_2 \end{aligned} \quad (1.10.11)$$

$$\begin{aligned} c_{23} &= \bar{u}_2^t \hat{C} \bar{u}_3 = \bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\phi_2} e^{\tilde{u}_3\phi_3} \bar{u}_3 = \bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\phi_2} \bar{u}_3 \Rightarrow \\ c_{23} &= (\bar{u}_2^t c\phi_1 + \bar{u}_1^t s\phi_1)(\bar{u}_3 c\phi_2 + \bar{u}_1 s\phi_2) = s\phi_1 s\phi_2 \end{aligned} \quad (1.10.12)$$

Eğer $s\phi_2 \neq 0$ ise,

$$\phi_1 = \text{atan}_2(c_{23}/s\phi_2, c_{13}/s\phi_2) = \text{atan}_2(\sigma c_{23}, \sigma c_{13}) \quad (1.10.13)$$

ϕ_3 açısının bulunuşu:

$$\begin{aligned} c_{31} &= \bar{u}_3^t \hat{C} \bar{u}_1 = \bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\phi_2} e^{\tilde{u}_3\phi_3} \bar{u}_1 = \bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_2\phi_2} e^{\tilde{u}_3\phi_3} \bar{u}_1 \Rightarrow \\ c_{31} &= (\bar{u}_3^t c\phi_2 - \bar{u}_1^t s\phi_2)(\bar{u}_1 c\phi_3 + \bar{u}_2 s\phi_3) = -s\phi_2 c\phi_3 \end{aligned} \quad (1.10.14)$$

$$\begin{aligned} c_{32} &= \bar{u}_3^t \hat{C} \bar{u}_2 = \bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_3\phi_1} e^{\tilde{u}_2\phi_2} e^{\tilde{u}_3\phi_3} \bar{u}_2 = \bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_2\phi_2} e^{\tilde{u}_3\phi_3} \bar{u}_2 \Rightarrow \\ c_{32} &= (\bar{u}_3^t c\phi_2 - \bar{u}_1^t s\phi_2)(\bar{u}_2 c\phi_2 - \bar{u}_1 s\phi_3) = s\phi_2 s\phi_3 \end{aligned} \quad (1.10.15)$$

Eğer $s\phi_2 \neq 0$ ise,

$$\phi_3 = \text{atan}_2(c_{32}/s\phi_2, -c_{31}/s\phi_2) = \text{atan}_2(\sigma c_{32}, -\sigma c_{31}) \quad (1.10.16)$$

Eğer $s\phi_2 = 0$ olursa, yani $\phi_2 = 0$ ya da $\phi_2 = \pi$ olursa, 3-2-3 sıralaması *tekilleşir*. Tekilleşme olduğu zaman, aşağıdaki durumlar ortaya çıkar.

$\phi_2 = 0$ olursa, \hat{C} matrisi şu şekli alır.

$$\begin{aligned}\hat{C} &= e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{\tilde{u}_2\pi}e^{\tilde{u}_3\phi_3} = e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{\tilde{u}_3\phi_3} = e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{\tilde{u}_3\phi_3} \Rightarrow \\ \hat{C} &= e^{\tilde{u}_3(\phi_1+\phi_3)} = e^{\tilde{u}_3\phi_{13}}\end{aligned}\quad (1.10.17)$$

(1.10.17) denkleminde ϕ_1 ve ϕ_3 açıları ayrı ayrı bulunamaz. Çünkü bu durumda, $\vec{u}_3^{(n)} = \vec{u}_3^{(a)}$ olur, yani, Şekil 1.4'te de görüleceği üzere, ϕ_1 ve ϕ_3 açılarının eksenleri çakışık hale gelir. Böyle olunca da, ortak eksen etrafındaki net dönüşü gösteren $\phi_{13} = \phi_1 + \phi_3$ açısının ϕ_1 ve ϕ_3 açılarını hangi oranda içerdiği belirlenemez. Bununla birlikte, ϕ_{13} açısının kendisi, (1.10.17) denkleminde şöyle bulunur.

$$\phi_{13} = \text{atan}_2(c_{21}, c_{11}) \quad (1.10.18)$$

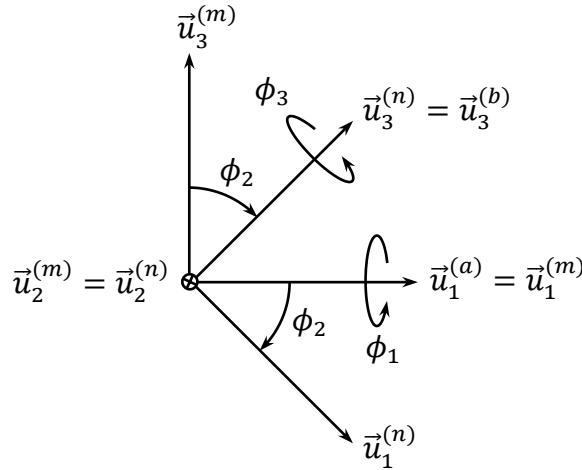
$\phi_2 = \pi$ olursa, \hat{C} matrisi bu kez şu şekli alır.

$$\begin{aligned}\hat{C} &= e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{\tilde{u}_2\pi}e^{\tilde{u}_3\phi_3} = e^{\tilde{u}_3\phi_1}e^{-\tilde{u}_3\phi_3}e^{\tilde{u}_2\pi} = e^{\tilde{u}_3(\phi_1-\phi_3)}e^{\tilde{u}_2\pi} \Rightarrow \\ e^{\tilde{u}_3(\phi_1-\phi_3)} &= e^{\tilde{u}_3\phi'_{13}} = \hat{C}e^{-\tilde{u}_2\pi}\end{aligned}\quad (1.10.19)$$

(1.10.19) denkleminde ϕ_1 ve ϕ_3 açıları ayrı ayrı bulunamaz. Çünkü bu durumda, $\vec{u}_3^{(n)} = -\vec{u}_3^{(a)}$ olur, yani, Şekil 1.4'te de görüleceği üzere, ϕ_1 ve ϕ_3 açılarının eksenleri zıt yönlerde çakışık hale gelir. Böyle olunca da, ortak eksen etrafındaki net dönüşü gösteren $\phi'_{13} = \phi_1 - \phi_3$ açısının ϕ_1 ve ϕ_3 açılarını hangi oranda içerdiği belirlenemez. Bununla birlikte, ϕ'_{13} açısının kendisi, (1.10.19) denkleminde şöyle bulunur.

$$\phi'_{13} = \text{atan}_2(-c_{12}, c_{22}) \quad (1.10.20)$$

Örnek 1.10.2: Asimetrik 1-2-3 Sıralaması



Şekil 1.5. Asimetrik 1-2-3 Euler Açısı Sıralaması

Şekil 1.5'te gösterilen bu sıralamaya göre, $\hat{C} = \hat{C}^{(a,b)}$ matrisi şöyle oluşur.

$$\hat{C} = \hat{R}_1(\phi_1)\hat{R}_2(\phi_2)\hat{R}_3(\phi_3) = e^{\tilde{u}_1\phi_1}e^{\tilde{u}_2\phi_2}e^{\tilde{u}_3\phi_3} \quad (1.10.21)$$

(1.10.21) denkleminin açılmış biçimi şöyledir.

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi_1 & -s\phi_1 \\ 0 & s\phi_1 & c\phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi_2 & 0 & s\phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\phi_2 & 0 & c\phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\phi_3 & -s\phi_3 & 0 \\ s\phi_3 & c\phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} c\phi_2 c\phi_3 & -c\phi_2 s\phi_3 & s\phi_2 \\ s\phi_1 s\phi_2 c\phi_3 + c\phi_1 s\phi_3 & -s\phi_1 s\phi_2 s\phi_3 + c\phi_1 c\phi_3 & -s\phi_1 c\phi_2 \\ -c\phi_1 s\phi_2 c\phi_3 + s\phi_1 s\phi_3 & c\phi_1 s\phi_2 s\phi_3 + s\phi_1 c\phi_3 & c\phi_1 c\phi_2 \end{bmatrix} \quad (1.10.22)$$

Asimetrik olan 1-2-3 sıralamasına göre, verilen bir \hat{C} matrisinden Euler açıları aşağıda açıklanan biçimde elde edilirler.

ϕ_2 açısının bulunuşu:

$$c_{13} = \bar{u}_1^t \hat{C} \bar{u}_3 = \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_1 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \phi_2} e^{\tilde{u}_3 \phi_3} \bar{u}_3 = \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_2 \phi_2} \bar{u}_3 \Rightarrow$$

$$c_{13} = \bar{u}_1^t (\bar{u}_3 c\phi_2 + \bar{u}_1 s\phi_2) = s\phi_2 \Rightarrow$$

$$\sin \phi_2 = c_{13} \Rightarrow \cos \phi_2 = \sigma \sqrt{1 - c_{13}^2}; \quad \sigma = \pm 1 \quad (1.10.23)$$

$$\phi_2 = \text{atan}_2(c_{13}, \sigma \sqrt{1 - c_{13}^2}) \quad (1.10.24)$$

Bu çözümdeki işaret değişkeni ($\sigma = \pm 1$), önceki 3-2-3 sıralamasından farklı olarak, ϕ_2 açısının işaretini değil fakat dar ya da geniş açı olmasını belirler. Şöyle ki,

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = +1 \Rightarrow \cos \phi_2 > 0 \Rightarrow 0 < |\phi_2| < \pi/2 \text{ (dar açı)} \\ \sigma = -1 \Rightarrow \cos \phi_2 < 0 \Rightarrow \pi/2 < |\phi_2| < \pi \text{ (geniş açı)} \end{array} \right\} \quad (1.10.25)$$

Öteyandan, ϕ_2 açısının işareti ise c_{13} tarafından belirlenir. Şöyle ki, $\text{sgn}(\phi_2) = \text{sgn}(c_{13})$.

ϕ_1 açısının bulunuşu:

$$c_{23} = \bar{u}_2^t \hat{C} \bar{u}_3 = \bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_1 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \phi_2} e^{\tilde{u}_3 \phi_3} \bar{u}_3 = \bar{u}_2^t e^{\tilde{u}_1 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \phi_2} \bar{u}_3 \Rightarrow$$

$$c_{23} = (\bar{u}_2^t c\phi_1 - \bar{u}_3^t s\phi_1)(\bar{u}_3 c\phi_2 + \bar{u}_1 s\phi_2) = -s\phi_1 c\phi_2 \quad (1.10.26)$$

$$c_{33} = \bar{u}_3^t \hat{C} \bar{u}_3 = \bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_1 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \phi_2} e^{\tilde{u}_3 \phi_3} \bar{u}_3 = \bar{u}_3^t e^{\tilde{u}_1 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \phi_2} \bar{u}_3 \Rightarrow$$

$$c_{33} = (\bar{u}_3^t c\phi_1 + \bar{u}_2^t s\phi_1)(\bar{u}_3 c\phi_2 + \bar{u}_1 s\phi_2) = c\phi_1 c\phi_2 \quad (1.10.27)$$

Eğer $c\phi_2 \neq 0$ ise,

$$\phi_1 = \text{atan}_2(-c_{23}/c\phi_2, c_{33}/c\phi_2) = \text{atan}_2(-\sigma c_{23}, \sigma c_{33}) \quad (1.10.28)$$

ϕ_3 açısının bulunuşu:

$$c_{11} = \bar{u}_1^t \hat{C} \bar{u}_1 = \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_1 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \phi_2} e^{\tilde{u}_3 \phi_3} \bar{u}_1 = \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_2 \phi_2} e^{\tilde{u}_3 \phi_3} \bar{u}_1 \Rightarrow$$

$$c_{11} = (\bar{u}_1^t c\phi_2 + \bar{u}_3^t s\phi_2)(\bar{u}_1 c\phi_3 + \bar{u}_2 s\phi_3) = c\phi_2 c\phi_3 \quad (1.10.29)$$

$$c_{12} = \bar{u}_1^t \hat{C} \bar{u}_2 = \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_1 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \phi_2} e^{\tilde{u}_3 \phi_3} \bar{u}_2 = \bar{u}_1^t e^{\tilde{u}_2 \phi_2} e^{\tilde{u}_3 \phi_3} \bar{u}_2 \Rightarrow$$

$$c_{12} = (\bar{u}_1^t c\phi_2 + \bar{u}_3^t s\phi_2)(\bar{u}_2 c\phi_2 - \bar{u}_1 s\phi_3) = -c\phi_2 s\phi_3 \quad (1.10.30)$$

Eğer $c\phi_2 \neq 0$ ise,

$$\phi_3 = \text{atan}_2(-c_{12}/c\phi_2, c_{11}/c\phi_2) = \text{atan}_2(-\sigma c_{12}, \sigma c_{11}) \quad (1.10.31)$$

Eğer $c\phi_2 = 0$ olursa, yani $\phi_2 = \pi/2$ ya da $\phi_2 = -\pi/2$ olursa, 1-2-3 sıralaması *tekilleşir*. Tekilleşme olduğu zaman, aşağıdaki durumlar ortaya çıkar.

$\phi_2 = \pi/2$ olursa, \hat{C} matrisi şu şekli alır.

$$\begin{aligned}\hat{C} &= e^{\tilde{u}_1\phi_1}e^{\tilde{u}_2\pi/2}e^{\tilde{u}_3\phi_3} = e^{\tilde{u}_1\phi_1}e^{\tilde{u}_1\phi_3}e^{\tilde{u}_2\pi/2} = e^{\tilde{u}_1(\phi_1+\phi_3)}e^{\tilde{u}_2\pi/2} \Rightarrow \\ e^{\tilde{u}_1(\phi_1+\phi_3)} &= e^{\tilde{u}_1\phi_{13}} = \hat{C}e^{-\tilde{u}_2\pi/2}\end{aligned}\quad (1.10.32)$$

(1.10.32) denkleminde ϕ_1 ve ϕ_3 açıları ayrı ayrı bulunamaz. Çünkü bu durumda, $\vec{u}_3^{(n)} = \vec{u}_1^{(a)}$ olur, yani ϕ_1 ve ϕ_3 açılarının eksenleri çakışık hale gelir. Böyle olunca da, ortak eksen etrafındaki net dönüşü gösteren $\phi_{13} = \phi_1 + \phi_3$ açısının ϕ_1 ve ϕ_3 açılarını hangi oranda içerdiği belirlenemez. Bununla birlikte, ϕ_{13} açısının kendisi, (1.10.30) denkleminde şöyle bulunur.

$$\phi_{13} = \text{atan}_2(c_{32}, c_{22}) \quad (1.10.33)$$

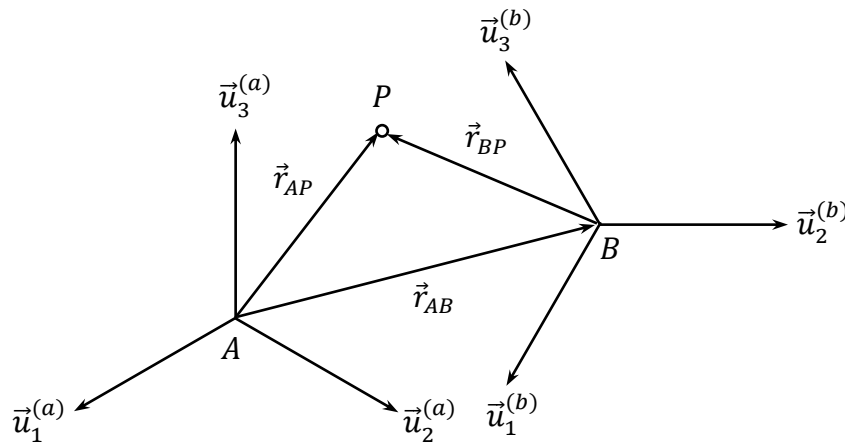
$\phi_2 = -\pi/2$ olursa, \hat{C} matrisi şu şekli alır.

$$\begin{aligned}\hat{C} &= e^{\tilde{u}_1\phi_1}e^{-\tilde{u}_2\pi/2}e^{\tilde{u}_3\phi_3} = e^{\tilde{u}_1\phi_1}e^{-\tilde{u}_1\phi_3}e^{-\tilde{u}_2\pi/2} = e^{\tilde{u}_1(\phi_1-\phi_3)}e^{-\tilde{u}_2\pi/2} \Rightarrow \\ e^{\tilde{u}_1(\phi_1-\phi_3)} &= e^{\tilde{u}_1\phi'_{13}} = \hat{C}e^{\tilde{u}_2\pi/2}\end{aligned}\quad (1.10.34)$$

(1.10.34) denkleminde ϕ_1 ve ϕ_3 açıları ayrı ayrı bulunamaz. Çünkü bu durumda, $\vec{u}_3^{(n)} = -\vec{u}_1^{(a)}$ olur, yani ϕ_1 ve ϕ_3 açılarının eksenleri zıt yönlerde çakışık hale gelir. Böyle olunca da, ortak eksen etrafındaki net dönüşü gösteren $\phi'_{13} = \phi_1 - \phi_3$ açısının ϕ_1 ve ϕ_3 açılarını hangi oranda içerdiği belirlenemez. Bununla birlikte, ϕ'_{13} açısının kendisi, (1.10.34) denkleminde şöyle bulunur.

$$\phi'_{13} = \text{atan}_2(c_{32}, c_{22}) \quad (1.10.35)$$

1.11. Bir Noktanın Orijinleri ve Yönelimleri Farklı Eksen Takımlarına Göre Konumu ve Homojen Dönüşüm Matrisleri



Şekil 1.6. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarında Gözlemlenmesi

1.11.1. Homojen ve Homojen Olmayan (Afin) Konum İlişkileri

Şekil 1.6'da gösterildiği gibi, bir P noktası, birbirine göre *ötelenmiş* ($A \rightarrow B$) ve *dönmüş* ($a \rightarrow b$) olan $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ gibi iki farklı eksen takımında gözlemlenmektedir.

P noktasının $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarına göre konumunu gösteren \vec{r}_{AP} ve \vec{r}_{BP} vektörleri arasındaki ilişki, *ötelenme vektörü* olan \vec{r}_{AB} aracılığıyla şu şekilde sağlanır.

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP} \quad (1.11.1)$$

(1.11.1) vektör denklemi, \vec{r}_{AP} ve \vec{r}_{BP} vektörlerinin $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarındaki matris gösterimleri kullanılarak aşağıdaki matris denklemi biçiminde de yazılabilir.

$$\vec{r}_{AP}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}_{BP}^{(b)} + \vec{r}_{AB}^{(a)} \quad (1.11.2)$$

(1.11.2) denklemi, P noktasının $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarındaki görünüşleri arasında ötelenme teriminin varlığı nedeniyle *homojen olmayan (afin)* ya da diğer bir deyişle *eklentili (biased)* bir ilişki teşkil etmektedir. Bu ilişkiyi homojenleştirmek için (1.11.2) denklemi, $1 = 1$ denklemi ile genişletilerek şöyle yazılabilir.

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_{AP}^{(a)} &= \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}_{BP}^{(b)} + \vec{r}_{AB}^{(a)} \\ 1 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.11.3)$$

(1.11.3) denklem çifti, tek ve homojen bir denklem biçiminde birleştirilerek şöyle de yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_{AP}^{(a)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)} & \vec{r}_{AB}^{(a)} \\ \vec{0}^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_{BP}^{(b)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.11.4)$$

(1.11.4) denklemi, aşağıdaki tanımlara yol açar.

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = \begin{bmatrix} \vec{r}_{AP}^{(a)} \\ 1 \end{bmatrix} : P \text{ noktasının } \mathcal{F}_a(A) \text{ 'daki } 4 \times 1 \text{ boyutlu matris gösterimi} \quad (1.11.5)$$

$$\bar{R}_{BP}^{(b)} = \begin{bmatrix} \vec{r}_{BP}^{(b)} \\ 1 \end{bmatrix} : P \text{ noktasının } \mathcal{F}_b(B) \text{ 'deki } 4 \times 1 \text{ boyutlu matris gösterimi} \quad (1.11.6)$$

$$\hat{H}_{AB}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)} & \vec{r}_{AB}^{(a)} \\ \vec{0}^t & 1 \end{bmatrix} : 4 \times 4 \text{ boyutlu homojen dönüşüm matrisi} \quad (1.11.7)$$

Yukarıdaki tanımlar kullanılınca, (1.11.4) denklemi, kısaca aşağıdaki derleşik biçimde yazılabilir.

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = \hat{H}_{AB}^{(a,b)} \bar{R}_{BP}^{(b)} \quad (1.11.8)$$

Böylece, görüldüğü gibi, ötelenme eklentisi yüzünden homojen olmayan (1.11.2) denklemi, denklem boyutunun üçten dörde çıkması pahasına, eklentisiz yani homojen olan (1.11.8) denkleme dönüştürülmüştür.

Dikkat edilirse, $\hat{H}_{AB}^{(a,b)}$ matrisi iki temel ögeyi bir arada içermektedir. Birincisi, $\hat{C}^{(a,b)}$ ile gösterilen *dönme ögesi*'dir. İkincisi ise, $\vec{r}_{AB}^{(a)}$ ile gösterilen *ötelenme ögesi*'dir.

Dikkat edilecek diğer bir husus da, $\hat{H}_{AB}^{(a,b)}$ matrisinin dördüncü yatay sırasının her zaman $[\vec{0}^t \ 1] = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ biçiminde bir *değişmez* olmasıdır.

1.11.2. Homojen Konum İlişkilerinin Sayısal İşlem Avantajı

Konum ilişkilerinin homojen biçimde ifade edilmesi, *özellikle* bilgisayarla yapılacak sayısal işlemler açısından oldukça önemli bir avantaj sağlamaktadır. Bu avantaj, aşağıdaki karşılaştırmalı inceleme ile gösterilmiştir.

Eğer P noktası, bir çok, örneğin $\mathcal{F}_a(A)$, $\mathcal{F}_b(B)$, $\mathcal{F}_c(C)$, $\mathcal{F}_d(D)$ gibi dört farklı eksen takımında gözlemleniyorsa, o zaman P noktasının konumu için aşağıdaki *denklem grupları* yazılabilir.

(a) Homojen olmayan denklem grubu:

$$\bar{r}_{AP}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \bar{r}_{BP}^{(b)} + \bar{r}_{AB}^{(a)} \quad (1.11.9)$$

$$\bar{r}_{BP}^{(b)} = \hat{C}^{(b,c)} \bar{r}_{CP}^{(c)} + \bar{r}_{BC}^{(b)} \quad (1.11.10)$$

$$\bar{r}_{CP}^{(c)} = \hat{C}^{(c,d)} \bar{r}_{DP}^{(d)} + \bar{r}_{CD}^{(c)} \quad (1.11.11)$$

$$\bar{r}_{AP}^{(a)} = \hat{C}^{(a,d)} \bar{r}_{DP}^{(d)} + \bar{r}_{AD}^{(a)} \quad (1.11.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_{AP}^{(a)} &= \hat{C}^{(a,b)} [\hat{C}^{(b,c)} \bar{r}_{CP}^{(c)} + \bar{r}_{BC}^{(b)}] + \bar{r}_{AB}^{(a)} \Rightarrow \\ \bar{r}_{AP}^{(a)} &= \hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,c)} [\hat{C}^{(c,d)} \bar{r}_{DP}^{(d)} + \bar{r}_{CD}^{(c)}] + \hat{C}^{(a,b)} \bar{r}_{BC}^{(b)} + \bar{r}_{AB}^{(a)} \Rightarrow \\ \bar{r}_{AP}^{(a)} &= [\hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,c)} \hat{C}^{(c,d)}] \bar{r}_{DP}^{(d)} + [\bar{r}_{AB}^{(a)} + \hat{C}^{(a,b)} \bar{r}_{BC}^{(b)} + \hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,c)} \bar{r}_{CD}^{(c)}] \end{aligned} \quad (1.11.13)$$

(1.11.12) ve (1.11.13) denklemlerine göre,

$$\hat{C}^{(a,d)} = \hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,c)} \hat{C}^{(c,d)} \quad (1.11.14)$$

$$\bar{r}_{AD}^{(a)} = \bar{r}_{AB}^{(a)} + \hat{C}^{(a,b)} \bar{r}_{BC}^{(b)} + \hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,c)} \bar{r}_{CD}^{(c)} \quad (1.11.15)$$

(b) Homojen denklem grubu:

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = \hat{H}_{AB}^{(a,b)} \bar{R}_{BP}^{(b)} \quad (1.11.16)$$

$$\bar{R}_{BP}^{(b)} = \hat{H}_{BC}^{(b,c)} \bar{R}_{CP}^{(c)} \quad (1.11.17)$$

$$\bar{R}_{CP}^{(c)} = \hat{H}_{CD}^{(c,d)} \bar{R}_{DP}^{(d)} \quad (1.11.18)$$

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = \hat{H}_{AD}^{(a,d)} \bar{R}_{DP}^{(d)} \quad (1.11.19)$$

$$\bar{R}_{AP}^{(a)} = [\hat{H}_{AB}^{(a,b)} \hat{H}_{BC}^{(b,c)} \hat{H}_{CD}^{(c,d)}] \bar{R}_{DP}^{(d)} \quad (1.11.20)$$

(1.11.19) ve (1.11.20) denklemlerine göre,

$$\hat{H}_{AD}^{(a,d)} = \hat{H}_{AB}^{(a,b)} \hat{H}_{BC}^{(b,c)} \hat{H}_{CD}^{(c,d)} \quad (1.11.21)$$

Özellikle, (1.11.21) ile (1.11.14) ve (1.4.15) denklemlerinin karşılaştırılması, homojen dönüşüm denklemlerinin peşpeşe yapılan dönüşümlerdeki derleşiklik (kısa ve toplu ifade) avantajını ortaya koymaktadır.

Homojen olmayan denklem grubu kullanılarak yapılan bir sayısal uygulamada, bileşke dönme kare matrisinin ve bileşke ötelenme dikeysıra matrisinin ayrı ayrı hesaplanması gerekmektedir. Öteyandan, bileşke homojen dönüşüm matrisini bulmak için tek bir hesaplama yetmektedir.

Yukarıdaki örnek incelemeye göre, (1.11.14) denklemi, bileşke dönme kare matrisi için iki matris çarpım işlemi, (1.11.15) denklemi, bileşke ötelenme dikeysıra matrisi için üç matris çarpım işlemi ve iki matris toplama işlemi, (1.11.13) denklemi ise, bileşke konum dikeysıra matrisi için bir matris çarpım işlemi ve bir de matris toplama işlemi gerektirmektedir. Yani, bileşke konum dikeysıra matrisi, dokuz matris işlemi yapılarak belirlenebilmektedir.

Oysa, homojen denklem grubu kullanılarak yapılan bir sayısal uygulamada, yalnızca bütünleşik bileşke dönme ve ötelenme kare matrisinin hesaplanması yeterli olmaktadır. Yine yukarıdaki örnek incelemeye göre, (1.11.21) denklemi, bileşke homojen dönüşüm matrisi için iki matris çarpım işlemi, (1.11.20) denklemi ise, bileşke konum dikeysıra matrisi için bir matris çarpım işlemi daha gerektirmektedir. Yani, bileşke konum dikeysıra matrisi, dokuz yerine yalnızca üç matris işlemi yapılarak belirlenebilmektedir.

1.11.3. Homojen Dönüşüm Matrislerinin Bazı Özellikleri

Homojen dönüşüm matrislerine ait bazı özellikler aşağıda belirtilmiştir.

(1.11.7) denkleminde yararlanılarak gösterilebilir ki,

$$\det[\hat{H}_{AB}^{(a,b)}] = \det[\hat{C}^{(a,b)}] = 1 \quad (1.11.22)$$

(1.11.8) denklemi, önce $\mathcal{F}_a(A)$ ile $\mathcal{F}_b(B)$ 'nin yeri değiştirilerek ve sonra $\hat{H}_{AB}^{(a,b)}$ matrisinin tersi alınarak aşağıdaki iki biçimde yazılabilir.

$$\bar{R}_{BP}^{(b)} = \hat{H}_{BA}^{(b,a)} \bar{R}_{AP}^{(a)} \quad (1.11.23)$$

$$\bar{R}_{BP}^{(b)} = [\hat{H}_{AB}^{(a,b)}]^{-1} \bar{R}_{AP}^{(a)} \quad (1.11.24)$$

(1.11.23) ve (1.11.24) denklemlerine göre ve $\vec{r}_{BA} = -\vec{r}_{AB}$ olduğu göz önüne alınarak $\hat{H}_{AB}^{(a,b)}$ matrisinin tersi şöyle elde edilir.

$$[\hat{H}_{AB}^{(a,b)}]^{-1} = \hat{H}_{BA}^{(b,a)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(b,a)} & \vec{r}_{BA}^{(b)} \\ \vec{0}^t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)t} & -\hat{C}^{(a,b)t} \vec{r}_{AB}^{(a)} \\ \vec{0}^t & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11.25)$$

$\mathcal{F}_a(A)$ ile $\mathcal{F}_b(B)$ arasındaki ötelenme ve dönme ilişkisi aşağıda gösterilen iki biçimde ifade edilebilir.

$$\mathcal{F}_a(A) \xrightarrow{\text{ötelenme}(A \rightarrow B)} \mathcal{F}_a(B) \xrightarrow{\text{dönme}(a \rightarrow b)} \mathcal{F}_b(B) \quad (1.11.22)$$

$$\mathcal{F}_a(A) \xrightarrow{\text{dönme}(a \rightarrow b)} \mathcal{F}_b(A) \xrightarrow{\text{ötelenme}(A \rightarrow B)} \mathcal{F}_b(B) \quad (1.11.23)$$

Yukarıdaki şemalara göre, $\hat{H}_{AB}^{(a,b)}$ matrisi şu iki biçimde ayrıştırılabilir.

$$\hat{H}_{AB}^{(a,b)} = \hat{H}_{AB}^{(a,a)} \hat{H}_{BB}^{(a,b)} = \hat{H}_{AB}^{(a)} \hat{H}_B^{(a,b)} \quad (\text{önce ötelenme, sonra dönme}) \quad (1.11.24)$$

$$\hat{H}_{AB}^{(a,b)} = \hat{H}_{AA}^{(a,b)} \hat{H}_{AB}^{(b,b)} = \hat{H}_A^{(a,b)} \hat{H}_{AB}^{(b)} \quad (\text{önce dönme, sonra ötelenme}) \quad (1.11.25)$$

Yukarıdaki ayrıştırmalarda yer alan $\hat{H}_{AB}^{(a)} = \hat{H}_{AB}^{(a,a)}$ ve $\hat{H}_{AB}^{(b)} = \hat{H}_{AB}^{(b,b)}$ matrislerine "yalın ötelenme matrisleri"; $\hat{H}_A^{(a,b)} = \hat{H}_{AA}^{(a,b)}$ ve $\hat{H}_B^{(a,b)} = \hat{H}_{BB}^{(a,b)}$ matrislerine ise "yalın dönme matrisleri" denir. Bu matrislerin ayrıntılı ifadeleri aşağıda gösterilmiştir.

$$\hat{H}_{AB}^{(a)} = \begin{bmatrix} \hat{I} & \bar{r}_{AB}^{(a)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_{AB}^{(b)} = \begin{bmatrix} \hat{I} & \bar{r}_{AB}^{(b)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I} & \hat{C}^{(b,a)}\bar{r}_{AB}^{(a)} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11.26)$$

$$\hat{H}_A^{(a,b)} = \hat{H}_B^{(a,b)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)} & \bar{0} \\ \bar{0}^t & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11.27)$$

Dikkat edilirse, yalın ötelenme matrisi, ötelenmenin gözlemlendiği eksen takımına bağlıdır. Yani,

$$\hat{H}_{AB}^{(a)} \neq \hat{H}_{AB}^{(b)} \quad (1.11.28)$$

Oysa, yalın dönme matrisi, dönmenin hangi nokta etrafında yapıldığına bağlı değildir. Dolayısıyla, bu matris istenirse altyazıtsız olarak da gösterilebilir. Yani,

$$\hat{H}_A^{(a,b)} = \hat{H}_B^{(a,b)} = \hat{H}^{(a,b)} \quad (1.11.29)$$

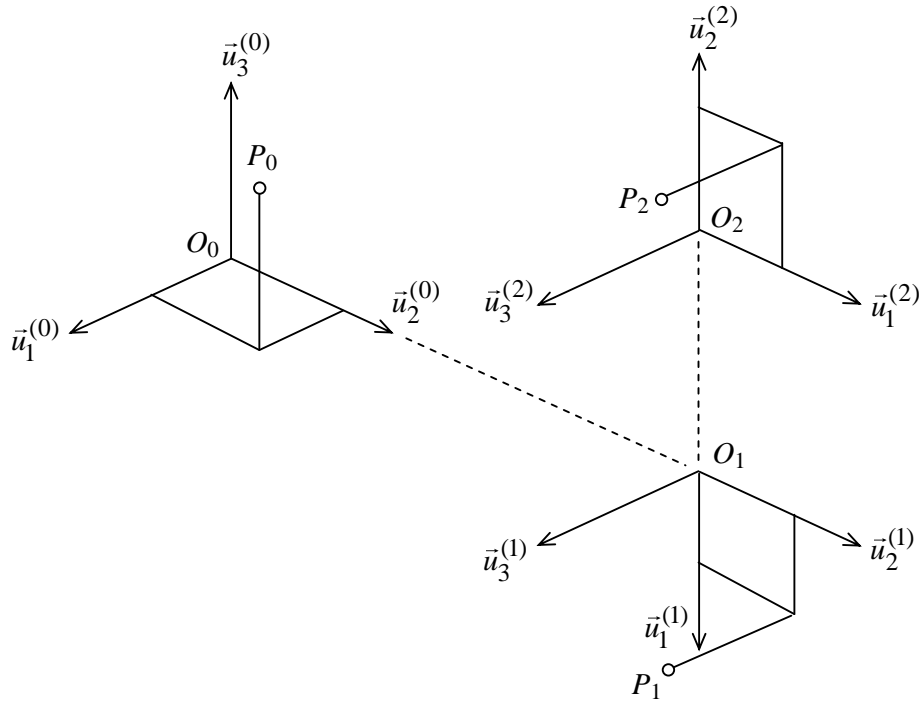
Örnek 1.11.1:

Şekil 1.7'de, $\mathcal{F}(O)$ gibi yerdeğiştiren bir eksen takımının peşpeşe aldığı üç farklı konum (yer ve yönelim) gösterilmiştir. P noktası, $\mathcal{F}(O)$ içinde sabit bir noktadır. Bu noktanın koordinatları, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ m olarak belirtilmiştir. $\mathcal{F}(O)$ eksen takımının üç konumu arasındaki ötelenme ve dönme yerdeğişimleri ise, şöyle belirtilmiştir.

$$\mathcal{F}_0(O_0) \xrightarrow[\text{dönme } [\bar{u}_2^{(0)}, \pi/2]]{\text{ötelenme } [\bar{u}_2^{(0)}, d_{01}]} \mathcal{F}_1(O_1) \xrightarrow[\text{dönme } [\bar{u}_3^{(1)}, \pi/2]]{\text{ötelenme } [\bar{u}_1^{(1)}, -d_{12}]} \mathcal{F}_2(O_2) \quad (1.11.30)$$

(1.11.30) yerdeğiştirme şemasındaki O orijinine ait ötelenme mesafeleri ise şunlardır.

$$d_{01} = 3 \text{ m}, \quad d_{12} = 2 \text{ m} \quad (1.11.31)$$



Şekil 1.7: Bir Eksen Takımının İki Basamaklı Yer Değiştirmesi

Birbirini izleyen dönme ve ötelenme yerdeğişimleri, aşağıdaki matrislerle ifade edilmiştir.

$$\hat{C}^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_2\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{01}^{(0)} = d_{01}\vec{u}_2^{(0/0)} = 3\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.11.32)$$

$$\hat{C}^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_3\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{12}^{(1)} = -d_{12}\vec{u}_1^{(1/1)} = -2\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.11.33)$$

Yukarıda ayrı ayrı ifade edilen dönme ve ötelenme yerdeğişimleri, aşağıdaki homojen yerdeğişim matrisleri sayesinde bütünleşik olarak da ifade edilebilir.

$$\hat{H}_{O_0O_1}^{(0,1)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(0,1)} & \vec{r}_{01}^{(0)} \\ \vec{0}^t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11.34)$$

$$\hat{H}_{O_1O_2}^{(1,2)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(1,2)} & \vec{r}_{12}^{(1)} \\ \vec{0}^t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11.35)$$

$\mathcal{F}(O)$ eksen takımının ilk ve son konumları arasındaki toplam yerdeğiştirme matrisi ise, yukarıdaki iki matris çarpılarak şöyle elde edilebilir.

$$\hat{H}_{O_0O_2}^{(0,2)} = \hat{H}_{O_0O_1}^{(0,1)}\hat{H}_{O_1O_2}^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.11.36)$$

Toplam homojen yerdeğiştirme matrisinin dönme ve ötelenme bölüntüleri aşağıda gösterilmiştir. Böylece, dönme ve ötelenme yerdeğişimleri ayrı ayrı da elde edilmiş olur.

$$\hat{C}^{(0,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.11.37)$$

$$\vec{r}_{02}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 \Rightarrow \vec{r}_{02} = 3\vec{u}_2^{(0)} + 2\vec{u}_3^{(0)} \quad (1.11.38)$$

Yukarıdaki denklemler, istenirse, dönme ve ötelenme ilişkileri bütünleştirilmeden de aşağıda olduğu gibi elde edilebilirler.

$$\hat{C}^{(0,2)} = \hat{C}^{(0,1)}\hat{C}^{(1,2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.11.39)$$

$$\bar{r}_{02}^{(0)} = \bar{r}_{01}^{(0)} + \bar{r}_{12}^{(0)} = \bar{r}_{01}^{(0)} + \hat{C}^{(0,1)}\bar{r}_{12}^{(1)} = 3\bar{u}_2 + (e^{\bar{u}_2\pi/2})(-2\bar{u}_1) \Rightarrow$$

$$\bar{r}_{02}^{(0)} = 3\bar{u}_2 + 2\bar{u}_3 \Rightarrow \bar{r}_{02} = 3\bar{u}_2^{(0)} + 2\bar{u}_3^{(0)} \quad (1.11.40)$$

Öte yandan, O_2 ve P_2 noktalarının $\mathcal{F}_0(O_0)$ eksen takımına göre konumları, toplam homojen yerdeğiştirme matrisi kullanılarak aşağıda gösterilen biçimde bulunabilir.

$$\bar{r}_{O_2O_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{R}_{O_0O_2}^{(0)} = \hat{H}_{O_0O_2}^{(0,2)}\bar{R}_{O_2O_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\bar{r}_{O_0O_2}^{(0)} = 3\bar{u}_2 + 2\bar{u}_3 \Rightarrow \bar{r}_{O_0O_2} = \bar{r}_{02} = 3\bar{u}_2^{(0)} + 2\bar{u}_3^{(0)} \quad (1.11.40)$$

NOT: Bir konum vektörü sıfır bile olsa, ona ait dört boyutlu dikeysıra matrisi sıfır olamaz, çünkü bu matrisin son ögesi, tanım gereği, her zaman "1" olmak zorundadır. Bu örnekte de görüldüğü gibi, $\bar{r}_{O_2O_2} = \vec{0}$ ya da ona ait üç boyutlu dikeysıra matrisi $\bar{r}_{O_2O_2}^{(2)} = \vec{0}$ olsa bile, aynı vektöre ait dört boyutlu $\bar{R}_{O_2O_2}^{(2)}$ dikeysıra matrisinin son ögesi, "0" değil "1" olarak yerine yazılmıştır.

P_2 noktasının konumuna gelince, o da şöyle bulunur.

$$\bar{r}_{O_2P_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{R}_{O_0P_2}^{(0)} = \hat{H}_{O_0P_2}^{(0,2)}\bar{R}_{O_2P_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\bar{r}_{O_0P_2}^{(0)} = 1\bar{u}_1 + 4\bar{u}_2 + 3\bar{u}_3 \Rightarrow \bar{r}_{O_0P_2} = 1\bar{u}_1^{(0)} + 4\bar{u}_2^{(0)} + 3\bar{u}_3^{(0)} \quad (1.11.41)$$

Aslında, bu örnek için, (1.11.40) ve (1.11.41) denklemlerindeki sonuçlar, Şekil 1.7'ye bakılarak doğrudan doğruya görsel olarak da elde edilebilirler.

1.12. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre Türevleri

1.12.1. Bir Vektörün Belli Bir Eksen Takımına Göre Türevi

Bir vektörün türevinin alınması, seçilen eksen takımına göre *bağıl* bir işlemdir. Örneğin, bir \vec{r} vektörünün $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ gibi iki farklı eksen takımına göre alınan türevleri aşağıdaki biçimlerde gösterilebilir.

$$D_a \vec{r} = d_a \vec{r} / dt = [d\vec{r}/dt]_{\mathcal{F}_a} \quad (1.12.1)$$

$$D_b \vec{r} = d_b \vec{r} / dt = [d\vec{r}/dt]_{\mathcal{F}_b} \quad (1.12.2)$$

Söz konusu vektörün türevi, (1.12.1) denklemine göre alınırken \mathcal{F}_a eksen takımının yönelimi; (1.12.2) denklemine göre alınırken de \mathcal{F}_b eksen takımının yönelimi sabit kabul edilir. Türevi alınacak vektör, $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarında şöyle çözüştürülebilir.

$$\vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} r_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} r_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} r_3^{(a)} = \vec{u}_1^{(b)} r_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)} r_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)} r_3^{(b)} \quad (1.12.3)$$

Bu çözüştürmelere göre, $D_a \vec{r}$ ve $D_b \vec{r}$ türevleri şöyle ifade edilir.

$$D_a \vec{r} = \vec{u}_1^{(a)} \dot{r}_1^{(a)} + \vec{u}_2^{(a)} \dot{r}_2^{(a)} + \vec{u}_3^{(a)} \dot{r}_3^{(a)} \quad (1.12.4)$$

$$D_b \vec{r} = \vec{u}_1^{(b)} \dot{r}_1^{(b)} + \vec{u}_2^{(b)} \dot{r}_2^{(b)} + \vec{u}_3^{(b)} \dot{r}_3^{(b)} \quad (1.12.5)$$

(1.12.4) ve (1.12.5) denklemlerine göre, \vec{r} vektörünün ve türevlerinin $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarındaki matris gösterimleri şöyle ilişkilendirilir.

$$[\vec{r}]^{(a)} = \vec{r}^{(a)} = \begin{bmatrix} r_1^{(a)} \\ r_2^{(a)} \\ r_3^{(a)} \end{bmatrix} \Rightarrow [D_a \vec{r}]^{(a)} = \dot{\vec{r}}^{(a)} = \begin{bmatrix} \dot{r}_1^{(a)} \\ \dot{r}_2^{(a)} \\ \dot{r}_3^{(a)} \end{bmatrix} \quad (1.12.6)$$

$$[\vec{r}]^{(b)} = \vec{r}^{(b)} = \begin{bmatrix} r_1^{(b)} \\ r_2^{(b)} \\ r_3^{(b)} \end{bmatrix} \Rightarrow [D_b \vec{r}]^{(b)} = \dot{\vec{r}}^{(b)} = \begin{bmatrix} \dot{r}_1^{(b)} \\ \dot{r}_2^{(b)} \\ \dot{r}_3^{(b)} \end{bmatrix} \quad (1.12.7)$$

Dikkat edilirse, (1.12.6) ve (1.12.7) denklemleri, çözüştürme ve türev alma eksen takımları aynı ise geçerlidir.

Ne var ki, çözüştürme ve türev alma eksen takımlarının her zaman aynı olmaları gerekmez. Böyle bir durumda, aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$[D_b \vec{r}]^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} [D_b \vec{r}]^{(b)} = \hat{C}^{(a,b)} \dot{\vec{r}}^{(b)} \quad (1.12.8)$$

$$[D_a \vec{r}]^{(b)} = \hat{C}^{(b,a)} [D_a \vec{r}]^{(a)} = \hat{C}^{(b,a)} \dot{\vec{r}}^{(a)} \quad (1.12.9)$$

(1.12.8) denkleminde türev alma eksen takımı \mathcal{F}_b , (1.12.9) denkleminde ise \mathcal{F}_a 'dır. Bu eksen takımlarına göre türevleri alınan \vec{r} vektörünün matris gösterimleri ise ayrı ayrı \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b eksen takımlarında oluşturulmuş ve $\hat{C}^{(a,b)}$ ile $\hat{C}^{(b,a)}$ dönüşüm matrisleri ile ilişkilendirilmişlerdir.

1.12.2. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre Türevlerinin Arasındaki İlişki ve Bağlı Açısal Hız Tanımı (Coriolis Transport Teoremi)

Bir \vec{r} vektörünün $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ gibi birbirlerine göre açısal olarak farklı hareket eden iki eksen takımına göre alınan türevleri, "Coriolis Transport Teoremi" olarak bilinen teorem sayesinde ilişkilendirilir. Bu teorem şöyle ifade edilir.

$$D_a \vec{r} = D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r} \quad (1.12.10)$$

(1.12.10) denklemindeki $\vec{\omega}_{b/a}$ vektörü, $\mathcal{F}_b(B)$ 'nin $\mathcal{F}_a(A)$ 'ya göre *bağlı açısal hızı* olarak tanımlanır. Aynı denklemden, sol tarafın $\mathcal{F}_a(A)$ 'daki, sağ tarafın ise $\mathcal{F}_b(B)$ 'deki matris gösterimleri kullanılarak aşağıdaki matris denklemini elde edilir.

$$\dot{\vec{r}}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)}[\dot{\vec{r}}^{(b)} + \vec{\omega}_{b/a}^{(b)} \vec{r}^{(b)}] \quad (1.12.11)$$

(1.12.11) denklemini, türev almadan önce yazılan aşağıdaki dönüşüm denkleminde yola çıkılarak da elde edilebilir.

$$\vec{r}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}^{(b)} \quad (1.12.12)$$

(1.12.12) denklemin taraf tarafa alınan türevi, aşağıdaki denklemini verir.

$$\dot{\vec{r}}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \dot{\vec{r}}^{(b)} + \dot{\hat{C}}^{(a,b)} \vec{r}^{(b)} = \hat{C}^{(a,b)}[\dot{\vec{r}}^{(b)} + \hat{C}^{(b,a)} \dot{\hat{C}}^{(a,b)} \vec{r}^{(b)}] \quad (1.12.13)$$

(1.12.11) ve (1.12.13) denklemleri karşılaştırılınca, iki eksen takımı arasındaki *bağlı açısal hız*, iki eksen takımı arasındaki *bağlı yönelim matrisi* ile (yani *dönüşüm matrisi* ile) aşağıdaki denklemler aracılığıyla ilişkilendirilir.

$$\vec{\omega}_{b/a}^{(b)} = \hat{C}^{(b,a)} \dot{\hat{C}}^{(a,b)} \Rightarrow \vec{\omega}_{b/a}^{(a)} = \text{dsm}[\hat{C}^{(b,a)} \dot{\hat{C}}^{(a,b)}] \quad (1.12.14)$$

Buradaki "dsm", verilen bir dikeysıra matrisine karşılık gelen antisimetrik matrisi oluşturan "asm" işlecinin tersidir. Yani, $\text{dsm} = \text{asm}^{-1}$. Diğer bir deyişle, dsm işleci, verilen bir antisimetrik matrise karşılık gelen dikeysıra matrisini oluşturur.

(1.12.14) denkleminde de aşağıdaki (1.12.15) denklemini elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{b/a}^{(a)} &= \hat{C}^{(a,b)} \vec{\omega}_{b/a}^{(b)} \Rightarrow \vec{\omega}_{b/a}^{(a)} = \hat{C}^{(a,b)} \vec{\omega}_{b/a}^{(b)} \hat{C}^{(b,a)} = \hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,a)} \dot{\hat{C}}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,a)} \Rightarrow \\ \vec{\omega}_{b/a}^{(a)} &= \dot{\hat{C}}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,a)} \Rightarrow \vec{\omega}_{b/a}^{(a)} = \text{dsm}[\dot{\hat{C}}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,a)}] \end{aligned} \quad (1.12.15)$$

(1.12.14) ve (1.12.15) denklemlerine göre, $\hat{S}^{(b)} = \hat{C}^{(b,a)} \dot{\hat{C}}^{(a,b)}$ ve $\hat{S}^{(a)} = \dot{\hat{C}}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,a)}$ matrisleri, birer antisimetrik matris olmaktadır.

Eğer \vec{r} vektörünün türevleri, birbirlerinden farklı açısal hareketleri olan üç eksen takımına göre alınır, (1.12.10) denklemini, şu üç şekilde yazılabilir.

$$D_a \vec{r} = D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r} \quad (1.12.16)$$

$$D_b \vec{r} = D_c \vec{r} + \vec{\omega}_{c/b} \times \vec{r} \quad (1.12.17)$$

$$D_a \vec{r} = D_c \vec{r} + \vec{\omega}_{c/a} \times \vec{r} \quad (1.12.18)$$

Yukarıdaki üç denklemden şu sonuç çıkar.

$$\vec{\omega}_{c/a} = \vec{\omega}_{c/b} + \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.12.19)$$

(1.12.19) denklemi, bağıl açısal hızların bileşkesinin *yalnızca toplama* yoluyla elde edilebileceğini göstermektedir. Oysa, daha önce de görüldüğü gibi, bağıl yönelim matrislerinin bileşkesi, *yalnızca çarpım* yoluyla elde edilmektedir. Şöyle ki,

$$\hat{C}^{(a,c)} = \hat{C}^{(a,b)}\hat{C}^{(b,c)} \quad (1.12.20)$$

1.12.3. Bir Vektörün Farklı Eksen Takımlarına Göre İkinci Türevlerinin Arasındaki İlişki ve Bağıl Açısal İvme Tanımı

Coriolis Transport teoremi uygulanarak (1.12.10) denkleminin taraf tarafa bir kez daha türevi, aşağıdaki gösterildiği gibi alınabilir.

$$\begin{aligned} D_a^2 \vec{r} &= D_a(D_a \vec{r}) = D_a(D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) \Rightarrow \\ D_a^2 \vec{r} &= D_b(D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) + \vec{\omega}_{b/a} \times (D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) \Rightarrow \\ D_a^2 \vec{r} &= D_b^2 \vec{r} + (D_b \vec{\omega}_{b/a}) \times \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times (D_b \vec{r}) + \vec{\omega}_{b/a} \times (D_b \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) \Rightarrow \\ D_a^2 \vec{r} &= D_b^2 \vec{r} + 2\vec{\omega}_{b/a} \times (D_b \vec{r}) + \vec{\alpha}_{b/a} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{b/a} \times (\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (1.12.21)$$

(1.12.21) denklemdeki $\vec{\alpha}_{b/a}$ vektörü, $\mathcal{F}_b(B)$ 'nin $\mathcal{F}_a(A)$ 'ya göre *bağıl açısal ivmesi* olarak tanımlanır ve iki eksen takımı arasındaki bağıl açısal hız vektöründen aşağıdaki türev alma işlemiyle elde edilir.

$$\vec{\alpha}_{b/a} = D_b \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.12.22)$$

Bununla birlikte, Coriolis Transport teoremi uyarınca ve $\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{\omega}_{b/a} = \vec{0}$ olduğu için $\vec{\alpha}_{b/a}$ aşağıdaki türev alma işlemiyle de elde edilebilir.

$$\vec{\alpha}_{b/a} = D_a \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.12.23)$$

Ancak, dikkat etmek gerekir ki, (1.12.22) ve (1.12.23) denklemleri, yalnızca $\mathcal{F}_a(A)$ ile $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımları için geçerlidir. Bir başka deyişle, $\vec{\omega}_{b/a}$ vektörünün üçüncü bir $\mathcal{F}_c(C)$ eksen takımına göre alınan türevi, $\vec{\alpha}_{b/a}$ vektörünü vermez. Bu durum kısaca şöyle ifade edilebilir.

$$\vec{\alpha}_{b/a} = D_a \vec{\omega}_{b/a} = D_b \vec{\omega}_{b/a} \neq D_c \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.12.24)$$

Yine Coriolis Transport teoremine göre, $D_c \vec{\omega}_{b/a}$ türevi doğrudan $\vec{\alpha}_{b/a}$ vektörünü vermese de, $\vec{\alpha}_{b/a}$ vektörüyle aşağıda gösterilen biçimlerde ilişkilidir.

$$D_c \vec{\omega}_{b/a} = D_a \vec{\omega}_{b/a} + \vec{\omega}_{a/c} \times \vec{\omega}_{b/a} = \vec{\alpha}_{b/a} + \vec{\omega}_{a/c} \times \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.12.25)$$

$$D_c \vec{\omega}_{b/a} = D_b \vec{\omega}_{b/a} + \vec{\omega}_{b/c} \times \vec{\omega}_{b/a} = \vec{\alpha}_{b/a} + \vec{\omega}_{b/c} \times \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.12.26)$$

Öte yandan, daha önce, üç farklı eksen takımı söz konusu olduğunda, bağıl açısal hızların bileşkesinin yalnızca toplama yoluyla elde edilebileceği görülmüştü. Bu durum, (1.12.19) denklemiyle şöyle ifade edilmişti.

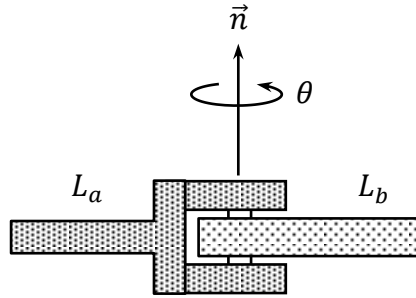
$$\vec{\omega}_{c/a} = \vec{\omega}_{c/b} + \vec{\omega}_{b/a} \quad (1.12.27)$$

(1.12.27) denkleminin türevi taraf tarafa $\mathcal{F}_a(A)$ eksen takımına göre alınır, bağıl açısal ivmelerin bileşkesi, aşağıda gösterilen biçimde elde edilir.

$$\begin{aligned} D_a \vec{\omega}_{c/a} &= D_a \vec{\omega}_{c/b} + D_a \vec{\omega}_{b/a} \Rightarrow \\ \vec{\alpha}_{c/a} &= (D_b \vec{\omega}_{c/b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{\omega}_{c/b}) + \vec{\alpha}_{b/a} \Rightarrow \\ \vec{\alpha}_{c/a} &= \vec{\alpha}_{c/b} + \vec{\alpha}_{b/a} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{\omega}_{c/b} \end{aligned} \quad (1.12.28)$$

Görüldüğü gibi, bağıl açısal ivmelerin bileşkesi yalnızca toplama yoluyla elde edilememektedir. Bileşkeye ilgili bağıl açısal hızların vektörel çarpımından oluşan bir terim daha eklenmektedir.

Örnek 1.12.1: Bir Döner Ekleme Ait Açısal Hız ve İvme



Şekil 1.8. Döner Ekleme Bağlı İki Uzun

Şekil 1.8'de bir döner ekleme bağlanmış iki uzun (L_a ve L_b) görülmektedir. Bu uzuvlara bağlı eksen takımları, \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b 'dir. Döner eklemin eksenini, \vec{n} birim vektörü ile belirlenmiştir. Şekilde, \mathcal{F}_b 'nin \mathcal{F}_a 'ya göre dönme açısı, $\theta_{b/a} = \theta$ ile gösterilmiştir. Bu sistem için aşağıdaki yönelim ilişkileri yazılabilir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = \hat{R}(\vec{n}^{(a)}, \theta_{b/a}) = \hat{R}(\vec{n}, \theta) = e^{\vec{n}\theta} \quad (1.12.29)$$

Dikkat edilirse, \vec{n} vektörü, dönme ekseninde olduğu için, \mathcal{F}_a ve \mathcal{F}_b eksen takımlarında aynı ve sabit olarak görünür. Yani,

$$\vec{n}^{(a)} = \vec{n}^{(b)} = \vec{n} = \text{sabit} \quad (1.12.30)$$

Bu durumda, \mathcal{F}_b 'nin \mathcal{F}_a 'ya göre açısal hızı ($\vec{\omega}_{b/a}$) şöyle belirlenir.

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{b/a}^{(a)} &= \dot{\hat{C}}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,a)} = [d(e^{\vec{n}\theta})/dt][e^{-\vec{n}\theta}] \Rightarrow \\ \vec{\omega}_{b/a}^{(a)} &= [d(e^{\vec{n}\theta})/d\theta][d\theta/dt][e^{-\vec{n}\theta}] = \dot{\theta}[d(e^{\vec{n}\theta})/d\theta][e^{-\vec{n}\theta}] \end{aligned} \quad (1.12.31)$$

Dönme matrislerine ait özelliklerden hatırlanacağı üzere ve \vec{n} sabit olduğu için,

$$d(e^{\vec{n}\theta})/d\theta = \vec{n}e^{\vec{n}\theta} = e^{\vec{n}\theta} \vec{n} \quad (1.12.32)$$

Bunun üzerine, (1.12.31) denklemi şu şekli alır.

$$\vec{\omega}_{b/a}^{(a)} = \dot{\theta}[\vec{n}e^{\vec{n}\theta}][e^{-\vec{n}\theta}] = \dot{\theta}\vec{n} = \dot{\theta}\vec{n}^{(a)} \quad (1.12.33)$$

(1.12.33) denkleminde şu sonuç elde edilir.

$$\vec{\omega}_{b/a}^{(a)} = \dot{\theta}\vec{n} = \dot{\theta}\vec{n}^{(a)} \quad (1.12.34)$$

(1.12.34) denkleminin karşılık gelen vektör denklemi ise şudur.

$$\vec{\omega}_{b/a} = \dot{\theta} \vec{n} \quad (1.12.35)$$

\mathcal{F}_b 'nin \mathcal{F}_a 'ya göre açısal ivmesi ($\vec{\alpha}_{b/a}$) ise şöyle belirlenir.

$$\vec{\alpha}_{b/a} = D_a \vec{\omega}_{b/a} = D_a (\dot{\theta} \vec{n}) = \ddot{\theta} \vec{n} + \dot{\theta} (D_a \vec{n}) \quad (1.12.36)$$

Daha önce de belirtildiği gibi, \vec{n} vektörü \mathcal{F}_a 'da sabit olarak görünür. Yani, $D_a \vec{n} = \vec{0}$ olur.

Dolayısıyla,

$$\vec{\alpha}_{b/a} = \ddot{\theta} \vec{n} \quad (1.12.37)$$

Öte yandan, L_a ve L_b uzuvlarının \mathcal{F}_o gibi üçüncü bir gözlem eksen takımına göre yönelimleri, açısal hızları ve açısal ivmeleri, aşağıda açıklanan biçimde ilişkilidirler.

$$\hat{C}^{(o,b)} = \hat{C}^{(o,a)} \hat{C}^{(a,b)} \quad (1.12.38)$$

$$\vec{\omega}_{b/o} = \vec{\omega}_{b/a} + \vec{\omega}_{a/o} = \vec{\omega}_{a/o} + \dot{\theta} \vec{n} \quad (1.12.39)$$

$$D_o \vec{\omega}_{b/o} = D_o \vec{\omega}_{b/a} + D_o \vec{\omega}_{a/o} = [D_a \vec{\omega}_{b/a} + \vec{\omega}_{a/o} \times \vec{\omega}_{b/a}] + D_o \vec{\omega}_{a/o} \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}_{b/o} = \vec{\alpha}_{b/a} + \vec{\alpha}_{a/o} + \vec{\omega}_{a/o} \times \vec{\omega}_{b/a} \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}_{b/o} = \vec{\alpha}_{a/o} + \ddot{\theta} \vec{n} + \dot{\theta} (\vec{\omega}_{a/o} \times \vec{n}) \quad (1.12.40)$$

Dikkat edilirse, \vec{n} vektörü, \mathcal{F}_a 'da sabit görünse de, \mathcal{F}_o 'da sabit görünmez. Çünkü, \vec{n} vektörü \mathcal{F}_a ile birlikte dönmektedir. Diğer bir deyişle,

$$D_o \vec{n} = D_a \vec{n} + \vec{\omega}_{a/o} \times \vec{n}; \quad D_a \vec{n} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$D_o \vec{n} = \vec{\omega}_{a/o} \times \vec{n} \quad (1.12.41)$$

(1.12.41) denkleminin de, (1.12.40) denkleminde, \vec{n} vektörünün \mathcal{F}_o 'ya göre dönmesinden dolayı ortaya çıkan üçüncü terimin varlık nedenini açıklamaktadır.

1.12.4. Bileşik Dönmelere İlişkin Açısal Hız ve İvme Formülasyonu

Peşpeşe yapılan dönmeler sonucunda ortaya çıkan *bileşik dönüşüm matrisi* şöyle ifade edilebilir.

$$\hat{C} = \hat{C}^{(o,m)} = e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} e^{\tilde{n}_3 \theta_3} \dots e^{\tilde{n}_{m-1} \theta_{m-1}} e^{\tilde{n}_m \theta_m} \quad (1.12.42)$$

Pratik durumlarda, dönme adımları öylesine oluşturulur ki, tüm $k = 1, 2, 3, \dots, m$ için \tilde{n}_k sabit olur. Dolayısıyla, (1.12.42) denkleminin kaynaklanan açısal hız formülü şöyle elde edilir.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{m/o}^{(o)} = \dot{C}^{(o,m)} \hat{C}^{(m,o)} = \dot{C} \hat{C}^t \quad (1.12.43)$$

(1.12.43) denkleminde,

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \dot{\theta}_1 \tilde{n}_1 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} e^{\tilde{n}_3 \theta_3} \dots e^{\tilde{n}_m \theta_m} + \dot{\theta}_2 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} \tilde{n}_2 e^{\tilde{n}_2 \theta_2} e^{\tilde{n}_3 \theta_3} \dots e^{\tilde{n}_m \theta_m} \\ &+ \dot{\theta}_3 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \tilde{n}_3 e^{\tilde{n}_3 \theta_3} \dots e^{\tilde{n}_m \theta_m} + \dots \\ &+ \dot{\theta}_m e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} e^{\tilde{n}_3 \theta_3} \dots e^{\tilde{n}_{m-1} \theta_{m-1}} \tilde{n}_m e^{\tilde{n}_m \theta_m} \end{aligned} \quad (1.12.44)$$

$$\hat{C}^t = e^{-\tilde{n}_m \theta_m} e^{-\tilde{n}_{m-1} \theta_{m-1}} \dots e^{-\tilde{n}_3 \theta_3} e^{-\tilde{n}_2 \theta_2} e^{-\tilde{n}_1 \theta_1} \quad (1.12.45)$$

(1.12.44) ve (1.12.45) denklemleri, (1.12.43) denkleminde yerine konunca, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} = & \dot{\theta}_1 \tilde{n}_1 + \dot{\theta}_2 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} \tilde{n}_2 e^{-\tilde{n}_2 \theta_2} + \dot{\theta}_3 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \tilde{n}_3 e^{-\tilde{n}_3 \theta_3} + \dots \\ & + \dot{\theta}_m e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \dots e^{\tilde{n}_{m-1} \theta_{m-1}} \tilde{n}_m e^{-\tilde{n}_{m-1} \theta_{m-1}} \dots e^{-\tilde{n}_2 \theta_2} e^{-\tilde{n}_3 \theta_3}\end{aligned}\quad (1.12.46)$$

Öteyandan, \hat{R} bir dönme matrisi ise, bilinmektedir ki,

$$\bar{y} = \hat{R}\bar{x} \Leftrightarrow \tilde{y} = \hat{R}\tilde{x}\hat{R}^t \quad (1.12.47)$$

Böylece, açısal hız, aşağıdaki dikeysıra matrisi biçiminde elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}\bar{\omega} = & \dot{\theta}_1 \bar{n}_1 + \dot{\theta}_2 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} \bar{n}_2 + \dot{\theta}_3 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \bar{n}_3 + \dot{\theta}_4 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} e^{\tilde{n}_3 \theta_3} \bar{n}_4 + \dots \\ & + \dot{\theta}_m e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \dots e^{\tilde{n}_{m-1} \theta_{m-1}} \bar{n}_m\end{aligned}\quad (1.12.48)$$

Dikkat edilirse, (1.12.42) ve (1.12.48) denklemleri arasında çok tipik bir *jenerik bağlantı* bulunmaktadır. Bu bağlantı sayesinde, yönelim ifadesi (1.12.42) denklemi biçiminde verilmişse, açısal hız dikeysıra matrisi, (1.12.48) denklemi sayesinde, hiç bir işlem yapmadan doğrudan doğruya ifade edilebilir.

Açısal ivme dikeysıra matrisi ise, yine tüm $k = 1, 2, 3, \dots, m$ için $\bar{n}_k =$ sabit varsayımına dayanarak ve (1.12.48) denkleminde yola çıkılarak şöyle elde edilir.

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_{m/o} = D_o \vec{\omega}_{m/o} & \Rightarrow \bar{\alpha}_{m/o}^{(o)} = \dot{\bar{\omega}}_{m/o}^{(o)} \Rightarrow \bar{\alpha} = \dot{\bar{\omega}} \Rightarrow \\ \bar{\alpha} = & \ddot{\theta}_1 \bar{n}_1 + \ddot{\theta}_2 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} \bar{n}_2 + \ddot{\theta}_3 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \bar{n}_3 + \dots + \ddot{\theta}_m e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \dots e^{\tilde{n}_{m-1} \theta_{m-1}} \bar{n}_m \\ & + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} \tilde{n}_1 \bar{n}_2 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} \tilde{n}_1 e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \bar{n}_3 + \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \tilde{n}_2 \bar{n}_3 + \dots \\ & + \dot{\theta}_m \dot{\theta}_{m-1} e^{\tilde{n}_1 \theta_1} e^{\tilde{n}_2 \theta_2} \dots e^{\tilde{n}_{m-1} \theta_{m-1}} \tilde{n}_{m-1} \bar{n}_m\end{aligned}\quad (1.12.49)$$

Örnek 1.12.2: 1-2-3 Euler Açısı Sıralamasına Göre Açısal Hız

Daha önce görüldüğü gibi, 1-2-3 Euler açısı sıralaması kullanıldığında, bir \mathcal{F}_b eksen takımının bir başka \mathcal{F}_a eksen takımına göre yönelimi, aşağıdaki matrisle belirlenir.

$$\hat{C}^{(a,b)} = e^{\tilde{u}_1 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \phi_2} e^{\tilde{u}_3 \phi_3} \quad (1.12.50)$$

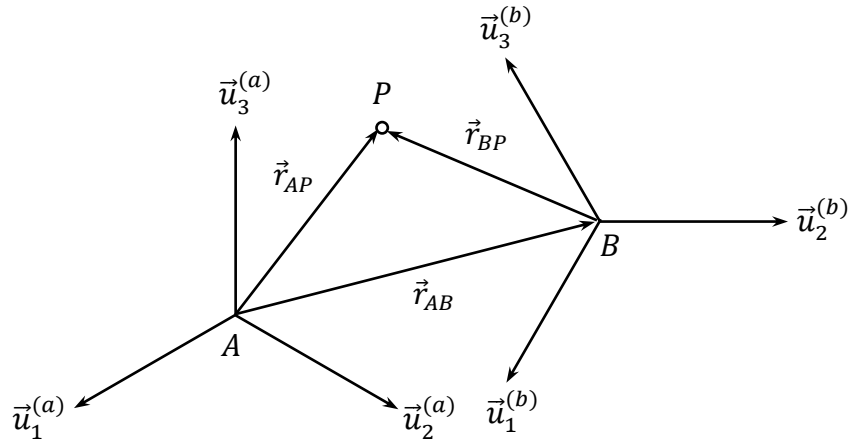
Bu sıralama için \mathcal{F}_b 'nin \mathcal{F}_a 'ya göre açısal hızı, (1.12.48) denklemi kullanılarak şöyle elde edilir.

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_{b/a}^{(a)} & = \dot{\phi}_1 \bar{u}_1 + \dot{\phi}_2 e^{\tilde{u}_1 \phi_1} \bar{u}_2 + \dot{\phi}_3 e^{\tilde{u}_1 \phi_1} e^{\tilde{u}_2 \phi_2} \bar{u}_3 \Rightarrow \\ \bar{\omega}_{b/a}^{(a)} & = \dot{\phi}_1 \bar{u}_1 + \dot{\phi}_2 (\bar{u}_2 c \phi_1 + \bar{u}_3 s \phi_1) + \dot{\phi}_3 e^{\tilde{u}_1 \phi_1} (\bar{u}_3 c \phi_2 + \bar{u}_1 s \phi_2) \Rightarrow \\ \bar{\omega}_{b/a}^{(a)} & = \dot{\phi}_1 \bar{u}_1 + \dot{\phi}_2 (\bar{u}_2 c \phi_1 + \bar{u}_3 s \phi_1) + \dot{\phi}_3 [(\bar{u}_3 c \phi_1 - \bar{u}_2 s \phi_1) c \phi_2 + \bar{u}_1 s \phi_2] \Rightarrow \\ \bar{\omega}_{b/a}^{(a)} & = \bar{u}_1 (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_3 s \phi_2) + \bar{u}_2 (\dot{\phi}_2 c \phi_1 - \dot{\phi}_3 s \phi_1 c \phi_2) \\ & + \bar{u}_3 (\dot{\phi}_2 s \phi_1 + \dot{\phi}_3 c \phi_1 c \phi_2)\end{aligned}\quad (1.12.51)$$

Vektör olarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_{b/a} & = \vec{u}_1^{(a)} (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_3 s \phi_2) + \vec{u}_2^{(a)} (\dot{\phi}_2 c \phi_1 - \dot{\phi}_3 s \phi_1 c \phi_2) \\ & + \vec{u}_3^{(a)} (\dot{\phi}_2 s \phi_1 + \dot{\phi}_3 c \phi_1 c \phi_2)\end{aligned}\quad (1.12.53)$$

1.13. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Hızı ve İvmesi



Şekil 1.9. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarında Gözlemlenmesi

1.13.1. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre Hızı

Şekil 1.9'a bakıldığında, bir P noktasının birbirine göre farklı hareket eden (ötelenen ve dönen) $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ gibi iki eksen takımında gözlemlenen bağıl konum vektörleri arasında aşağıdaki ilişkinin olduğu görülmektedir.

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP} \quad (1.13.1)$$

Eşdeğerli fakat farklı bir notasyonla (1.13.1) denklemi, şöyle de yazılabilir.

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A} \quad (1.13.2)$$

(1.13.1) ve (1.13.2) denklemlerindeki farklı notasyonlar, matematiksel olarak eşdeğerli olmakla birlikte, sözel olarak farklı birer yorumla şöyle ifade edilirler.

\vec{r}_{AB} : A noktasından B noktasına uzanan konum vektörü.

$\vec{r}_{B/A}$: B noktasının A noktasına göre bağıl konum vektörü.

P noktasının $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarında gözlemlenen bağıl hızları arasındaki ilişkiyi elde etmek üzere, (1.13.2) denkleminin eksen takımlarından birine göre, örneğin $\mathcal{F}_a(A)$ 'ya göre, taraf tarafa türevi alınırsa, aşağıdaki denklem ortaya çıkar.

$$D_a \vec{r}_{P/A} = D_a \vec{r}_{P/B} + D_a \vec{r}_{B/A} \quad (1.13.3)$$

(1.13.3) denklemindeki terimler, aşağıdaki gibi gösterilebilen genel bir hız tanımına yol açar.

$$\vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_a} = D_a \vec{r}_{P/B} \quad (1.13.4)$$

(1.13.4) denklemi ile tanımlanan hız vektörü, şöyle adlandırılır: P noktasının B noktasına göre $\mathcal{F}_a(A)$ eksen takımına göre türev alınarak elde edilen bağıl hız vektörü.

Dikkat edilirse, genel hız tanımı, aşağıda belirtilen üç temel unsura dayanmaktadır.

1. Hızı istenen nokta: P
2. Referans noktası: B
3. Türev alma eksen takımı: $\mathcal{F}_a(A)$

(1.13.4) denklemindeki gösterim kullanılarak (1.13.3) denklemi şöyle yazılabilir.

$$\vec{v}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_a} + \vec{v}_{B/A/\mathcal{F}_a} \quad (1.13.5)$$

Ne var ki, $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımını kullanan gözlemci, gözlemlediği noktaların hız vektörlerini de aynı eksen takımına göre oluşturmak ister. Bu isteği karşılamak üzere, (1.13.5) denklemi, Coriolis Transport teoremi kullanılarak şöyle de yazılabilir.

$$\vec{v}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_b} + \vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}_{P/B} + \vec{v}_{B/A/\mathcal{F}_a} \quad (1.13.6)$$

1.13.2. Bir Noktanın Farklı Eksen Takımlarına Göre İvmesi

(1.13.4) denklemindeki genel hız tanımına benzer bir biçimde genel ivme tanımı da aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$\vec{a}_{P/B/\mathcal{F}_a} = D_a^2 \vec{r}_{P/B} \quad (1.13.7)$$

Görüldüğü gibi, genel ivme tanımı da, aşağıda belirtilen üç temel unsura dayanmaktadır.

1. İvmesi istenen nokta: P
2. Referans noktası: B
3. Türev alma eksen takımı: $\mathcal{F}_a(A)$

(1.13.7) denklemindeki gösterim kullanılarak (1.13.3) denklemi, bir kez daha türevi alınarak şöyle yazılabilir.

$$\vec{a}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{a}_{P/B/\mathcal{F}_a} + \vec{a}_{B/A/\mathcal{F}_a} \quad (1.13.8)$$

Hız denkleminde olduğu gibi, $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımını kullanan gözlemci, gözlemlediği noktaların ivme vektörlerini de yine aynı eksen takımına göre oluşturmak ister. Bu isteği karşılamak üzere, (1.13.8) denklemi, Coriolis Transport teoremi bir kez daha kullanılarak şöyle de yazılabilir.

$$\begin{aligned} \vec{a}_{P/A/\mathcal{F}_a} &= \vec{a}_{P/B/\mathcal{F}_b} + 2\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_b} + \vec{\alpha}_{b/a} \times \vec{r}_{P/B} \\ &+ \vec{\omega}_{b/a} \times (\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}_{P/B}) + \vec{a}_{B/A/\mathcal{F}_a} \end{aligned} \quad (1.13.9)$$

(1.13.9) denklemindeki terimlerden ikisi, yalnızca birinci türevlerden (yani hız vektörlerinden) oluşmuştur. Bu terimler, aşağıdaki özel adlarla anılırlar.

$$\text{Coriolis İvmesi: } \vec{a}_{COR} = 2\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_b} \quad (1.13.10)$$

$$\text{Merkezcil İvme: } \vec{a}_{CP} = \vec{\omega}_{b/a} \times (\vec{\omega}_{b/a} \times \vec{r}_{P/B}) \quad (1.13.11)$$

1.13.3. Notasyonu Basitleştirilmiş Bağlı Hız ve İvme İfadeleri

Eğer yürütülen kinematik çalışma esnasında yalnızca $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ gibi iki eksen takımı kullanılıyorsa, yukarıdaki ayrıntılı notasyon yerine, aşağıdaki basitleştirilmiş notasyon da kullanılabilir.

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}, \quad \vec{r}_{P/B} = \vec{r}', \quad \vec{r}_{B/A} = \vec{r}^\circ \quad (1.13.12)$$

$$\vec{v}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{v}, \quad \vec{v}_{P/B/\mathcal{F}_b} = \vec{v}', \quad \vec{v}_{B/A/\mathcal{F}_a} = \vec{v}^\circ \quad (1.13.13)$$

$$\vec{a}_{P/A/\mathcal{F}_a} = \vec{a}, \quad \vec{a}_{P/B/\mathcal{F}_b} = \vec{a}', \quad \vec{a}_{B/A/\mathcal{F}_a} = \vec{a}^\circ \quad (1.13.14)$$

$$\vec{\omega}_{b/a} = \vec{\omega}, \quad \vec{\alpha}_{b/a} = \vec{\alpha} \quad (1.13.15)$$

Yukarıdaki basitleştirilmiş notasyon kullanılarak konum, hız, ve ivme denklemleri, aşağıdaki sade görünümüleriyle yazılabilir.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}^\circ \quad (1.13.16)$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}^\circ \quad (1.13.17)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}^\circ \quad (1.13.18)$$

(1.13.16,17,18) denklemlerini, terimlerin yerine göre $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarındaki matris gösterimlerini kullanarak da yazmak mümkündür. Bu amaçla, $\{\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}\}$ ve $\{\vec{r}^\circ, \vec{v}^\circ, \vec{a}^\circ\}$ üçlülerinin $\mathcal{F}_a(A)$ 'daki üstyazıtsız matris gösterimleri ile $\{\vec{r}', \vec{v}', \vec{a}', \vec{\omega}, \vec{\alpha}\}$ beşlisinin $\mathcal{F}_b(B)$ 'deki üstyazıtsız matris gösterimleri, $\hat{C} = \hat{C}^{(a,b)}$ dönüşüm matrisi eşliğinde kullanılabilir. Bu şekilde yazılan denklemler, aşağıda gösterilmiştir.

$$\vec{r} = \hat{C}\vec{r}' + \vec{r}^\circ \quad (1.13.19)$$

$$\vec{v} = \hat{C}(\vec{v}' + \vec{\omega}\vec{r}') + \vec{v}^\circ \quad (1.13.20)$$

$$\vec{a} = \hat{C}[\vec{a}' + 2\vec{\omega}\vec{v}' + (\vec{\alpha} + \vec{\omega}^2)\vec{r}'] + \vec{a}^\circ \quad (1.13.21)$$

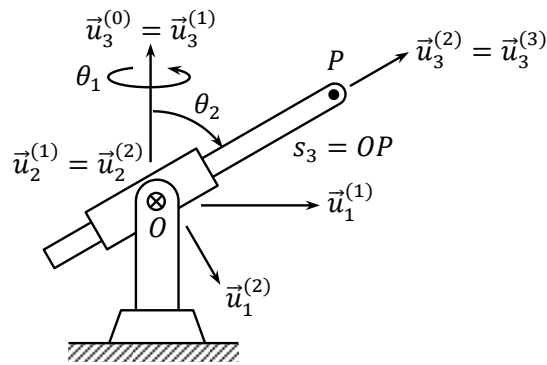
Dikkat edilirse, ivme ilişkisi, (1.13.21) denkleminde olduğu gibi, matris denklemi biçiminde ifade edildiğinde, \vec{a} ile $\vec{\omega}^2$ terimleri birbirleriyle doğrudan doğruya toplanabilmektedir.

Örnek 1.13.1

Şekil 1.10'da üç serbestlik dereceli bir manipülatör görünmektedir. Manipülatörün eklemlerinin ilk ikisi döner eklem, üçüncüsü ise kayar eklemdir. Manipülatör üç hareketli uzuvdan oluşmuştur. Manipülatörün uç noktası, P ile gösterilmiştir. Zemine ve uzuvlara bağlı eksen takımları sırasıyla şunlardır.

$$\mathcal{F}_0(O), \mathcal{F}_1(O), \mathcal{F}_2(O), \mathcal{F}_3(P); \mathcal{F}_3(P) \parallel \mathcal{F}_2(O)$$

Dikkat edilirse, $\mathcal{F}_3(P)$ ile $\mathcal{F}_2(O)$ eksen takımlarının orijinleri farklı bile olsa, yönelimleri aynıdır. Yani, eksenleri birbirine paraleldir.



Şekil 1.10. Üç Serbestlik Dereceli Bir RRP Manipülatörü

(a) Uzuvların Zemine Göre Yönelimleri:

$$\hat{C}^{(0,1)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1} \quad (1.13.22)$$

$$\hat{C}^{(0,2)} = \hat{C}^{(0,1)}\hat{C}^{(1,2)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_2\theta_2} \quad (1.13.23)$$

$$\hat{C}^{(0,3)} = \hat{C}^{(0,2)}\hat{C}^{(2,3)} = \hat{C}^{(0,2)}\hat{f} = \hat{C}^{(0,2)} = e^{\tilde{u}_3\theta_1}e^{\tilde{u}_2\theta_2} \quad (1.13.24)$$

(b) Uzuvarların Zemine Göre Açısal Hızları:

$$\vec{\omega}_{1/0} = \dot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(0)} = \dot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(1)} \quad (1.13.25)$$

$$\vec{\omega}_{2/0} = \vec{\omega}_{2/1} + \vec{\omega}_{1/0} = \dot{\theta}_2 \vec{u}_2^{(1)} + \dot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(0)} = \dot{\theta}_2 \vec{u}_2^{(1)} + \dot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(1)} \quad (1.13.26)$$

$$\vec{\omega}_{3/0} = \vec{\omega}_{3/2} + \vec{\omega}_{2/0} = \vec{0} + \vec{\omega}_{2/0} = \vec{\omega}_{2/0} \quad (1.13.27)$$

(c) Uzuvarların Zemine Göre Açısal İvmeleri:

$$\vec{\alpha}_{1/0} = D_0 \vec{\omega}_{1/0} = D_0 [\dot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(0)}] = \ddot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(0)} = \ddot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(1)} \quad (1.13.28)$$

$$\vec{\alpha}_{2/0} = D_0 \vec{\omega}_{2/0} = D_0 [\dot{\theta}_2 \vec{u}_2^{(1)} + \dot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(0)}] = D_0 [\dot{\theta}_2 \vec{u}_2^{(1)}] + D_0 [\dot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(0)}] \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}_{2/0} = D_1 [\dot{\theta}_2 \vec{u}_2^{(1)}] + \vec{\omega}_{1/0} \times [\dot{\theta}_2 \vec{u}_2^{(1)}] + \ddot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(0)} ; \vec{u}_3^{(0)} = \vec{u}_3^{(1)} \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}_{2/0} = \ddot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(1)} + D_1 [\dot{\theta}_2 \vec{u}_2^{(1)}] + [\dot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(1)}] \times [\dot{\theta}_2 \vec{u}_2^{(1)}] \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}_{2/0} = \ddot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(1)} + \ddot{\theta}_2 \vec{u}_2^{(1)} - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \vec{u}_1^{(1)} \quad (1.13.29)$$

$$\vec{\alpha}_{3/0} = \vec{\alpha}_{2/0} \quad (1.13.30)$$

(d) Uç Noktasının Zemine Göre Konumu:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{P/O} = s_3 \vec{u}_3^{(3)} = s_3 \vec{u}_3^{(2)} \quad (1.13.31)$$

(e) Uç Noktasının Zemine Göre Hızı:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P/O/F_0} = D_0 \vec{r}_{P/O} = D_0 [s_3 \vec{u}_3^{(2)}] = D_2 [s_3 \vec{u}_3^{(2)}] + \vec{\omega}_{2/0} \times [s_3 \vec{u}_3^{(2)}] \quad (1.13.32)$$

$$\vec{\omega}_{2/0} = \dot{\theta}_2 \vec{u}_2^{(1)} + \dot{\theta}_1 \vec{u}_3^{(1)} = \dot{\theta}_2 \vec{u}_2^{(2)} + \dot{\theta}_1 [\vec{u}_3^{(2)} c\theta_2 - \vec{u}_1^{(2)} s\theta_2] \Rightarrow$$

$$\vec{\omega}_{2/0} = \vec{u}_2^{(2)} \dot{\theta}_2 + \vec{u}_3^{(2)} (\dot{\theta}_1 c\theta_2) - \vec{u}_1^{(2)} (\dot{\theta}_1 s\theta_2) \quad (1.13.33)$$

$$\vec{v}_P = \dot{s}_3 \vec{u}_3^{(2)} + [\vec{u}_2^{(2)} \dot{\theta}_2 + \vec{u}_3^{(2)} (\dot{\theta}_1 c\theta_2) - \vec{u}_1^{(2)} (\dot{\theta}_1 s\theta_2)] \times [s_3 \vec{u}_3^{(2)}] \Rightarrow$$

$$\vec{v}_P = \vec{u}_3^{(2)} \dot{s}_3 + \vec{u}_1^{(2)} (s_3 \dot{\theta}_2) + \vec{u}_2^{(2)} (s_3 \dot{\theta}_1 s\theta_2) \quad (1.13.34)$$

(f) Uç Noktasının Zemine Göre İvmesi:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P/O/F_0} = D_0 \vec{v}_{P/O/F_0} = D_0 \vec{v}_P = D_2 \vec{v}_P + \vec{\omega}_{2/0} \times \vec{v}_P \Rightarrow$$

$$\vec{a}_P = \vec{u}_3^{(2)} \ddot{s}_3 + \vec{u}_1^{(2)} (s_3 \ddot{\theta}_2 + \dot{s}_3 \dot{\theta}_2) + \vec{u}_2^{(2)} (s_3 \ddot{\theta}_1 s\theta_2 + \dot{s}_3 \dot{\theta}_1 s\theta_2 + s_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c\theta_2)$$

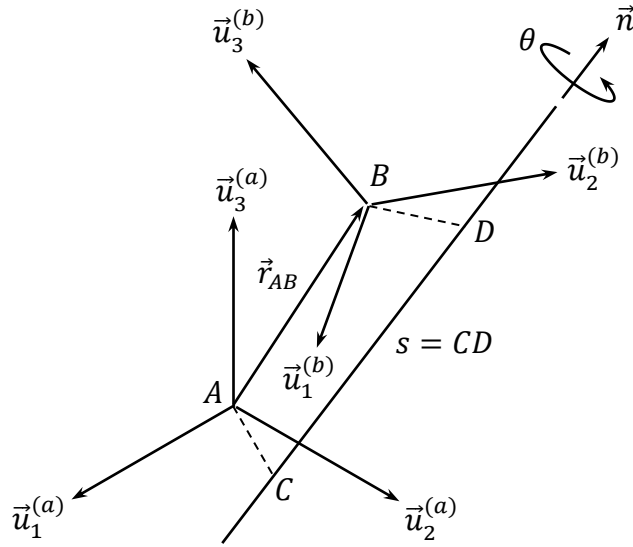
$$+ [\vec{u}_2^{(2)} \dot{\theta}_2 + \vec{u}_3^{(2)} (\dot{\theta}_1 c\theta_2) - \vec{u}_1^{(2)} (\dot{\theta}_1 s\theta_2)] \times [\vec{u}_3^{(2)} \dot{s}_3 + \vec{u}_1^{(2)} (s_3 \dot{\theta}_2) + \vec{u}_2^{(2)} (s_3 \dot{\theta}_1 s\theta_2)] \Rightarrow$$

$$\vec{a}_P = \vec{u}_1^{(2)} (s_3 \ddot{\theta}_2 + 2\dot{s}_3 \dot{\theta}_2 - s_3 \dot{\theta}_1^2 s\theta_2 c\theta_2)$$

$$+ \vec{u}_2^{(2)} (s_3 \ddot{\theta}_1 s\theta_2 + 2\dot{s}_3 \dot{\theta}_1 s\theta_2 + 2s_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 c\theta_2)$$

$$+ \vec{u}_3^{(2)} (\ddot{s}_3 - s_3 \dot{\theta}_2^2 - s_3 \dot{\theta}_1^2 s^2\theta_2) \quad (1.13.35)$$

1.14. Bir Eksen Takımının Diğer Bir Eksen Takımına Göre Vidasal Hareketi (Chasles Teoremi)



Şekil 1.11. İki Eksen Takımı Arasındaki Vidasal Yerdeğiştirme

1.14.1. Bir Eksen Takımının Bir Başka Eksen Takımına Göre Yerdeğiştirmesi

Şekil 1.11'de $\mathcal{F}_b(B)$ gibi bir eksen takımının $\mathcal{F}_a(A)$ gibi bir başka eksen takımına göre yaptığı yerdeğiştirme görülmektedir. Bu yerdeğiştirme, aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$\text{Dönme Yerdeğiştirmesi: } \hat{C}^{(a,b)} = \hat{C} = e^{\tilde{n}\theta} \quad (1.14.1)$$

$$\text{Ötelenme Yerdeğiştirmesi: } \vec{r}_{AB} = \vec{r} \quad (\text{orijinler arasında}) \quad (1.14.2)$$

Öte yandan, Chasles teoremine göre, ötelenme yerdeğiştirmesi, dönme ekseninde yapılan bir yerdeğiştirmeye indirgenebilir. Şöyle ki,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{AB} &= \vec{r}_{AC} + \vec{r}_{CD} + \vec{r}_{DB} \Rightarrow \\ \vec{r} &= \vec{c} + \vec{n}s - \vec{d} \end{aligned} \quad (1.14.3)$$

Yine Chasles teoremine göre, $\vec{c} = \vec{r}_{AC}$ vektörünün $\mathcal{F}_a(A)$ 'daki görünümü ile $\vec{d} = \vec{r}_{BD}$ vektörünün $\mathcal{F}_b(B)$ 'deki görünümü aynıdır. Yani,

$$\vec{d}^{(b)} = \vec{c}^{(a)} = \vec{c} \quad (1.14.4)$$

Bunun yanısıra, dönme eksenini belirleyen \vec{n} birim vektörünün, her iki eksen takımındaki görünümü de zaten aynıdır. Yani,

$$\vec{n}^{(b)} = \vec{n}^{(a)} = \vec{n} \quad (1.14.5)$$

(1.14.4) ve (1.14.5) denklemleri sayesinde, (1.14.3) denkleminin $\mathcal{F}_a(A)$ eksen takımındaki matris denklemini karşılığı şöyle yazılabilir.

$$\begin{aligned} \vec{r}^{(a)} &= \vec{c}^{(a)} + \vec{n}^{(a)}s - \hat{C}^{(a,b)}\vec{d}^{(b)} \Rightarrow \\ \vec{r} &= \vec{c} + \vec{n}s - e^{\tilde{n}\theta}\vec{c} = \vec{n}s - (e^{\tilde{n}\theta} - \hat{I})\vec{c} \end{aligned} \quad (1.14.6)$$

Bu arada, hatırlanacağı üzere,

$$e^{\tilde{n}\theta} = \hat{I} + \tilde{n} \sin \theta + \tilde{n}^2(1 - \cos \theta) \quad (1.14.7)$$

Böylece, (1.14.6) denklemi şöyle de yazılabilir.

$$\bar{r} = \bar{n}s - [\tilde{n} \sin \theta + \tilde{n}^2(1 - \cos \theta)]\bar{c} = \bar{n}s - \tilde{n}[\hat{I} \sin \theta + \tilde{n}(1 - \cos \theta)]\bar{c} \quad (1.14.8)$$

Bu denkleme dayanarak şu tanım yapılabilir.

$$\hat{E} = \hat{I} \sin \theta + \tilde{n}(1 - \cos \theta) \quad (1.14.9)$$

Bu sayede, (1.14.8) denklemi, kısaca, şöyle yazılabilir.

$$\bar{r} = \bar{n}s - \tilde{n}\hat{E}\bar{c} \quad (1.14.10)$$

(1.14.10) denkleminden s ile \bar{c} parametreleri, diğer parametreler (θ , \bar{n} , \bar{r}) cinsinden aşağıda açıklanan biçimde belirlenebilirler.

- Vida ekseninde ilerleme adımı (s):

$$\begin{aligned} \bar{n}^t \bar{r} &= \bar{n}^t \bar{n}s - \bar{n}^t \tilde{n} \hat{E} \bar{c}; \quad \bar{n}^t \bar{n} = 1, \quad \bar{n}^t \tilde{n} = \bar{0}^t \Rightarrow \\ s &= \bar{n}^t \bar{r} = \bar{n} \cdot \bar{r} \end{aligned} \quad (1.14.11)$$

Eğer $\theta \neq 0$ ise, s ilerleme adımı, bir *vida adımı* olarak yorumlanabilir ve θ dönme açısıyla şöyle ilişkilendirilebilir.

$$s = \lambda \theta \quad (1.14.12)$$

Bu ilişkide, λ parametresi *vidanın hatvesi* olarak tanımlanır.

- Vida ekseninin geçtiği C noktasının konumu (\bar{c}):

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{n}s - \tilde{n}\hat{E}\bar{c} = \bar{n}(\bar{n}^t \bar{r}) - \tilde{n}\hat{E}\bar{c} \Rightarrow \tilde{n}\hat{E}\bar{c} = (\bar{n}\bar{n}^t - \hat{I})\bar{r} \Rightarrow \tilde{n}\hat{E}\bar{c} = \tilde{n}^2 \bar{r} \Rightarrow \\ \hat{E}\bar{c} &= \tilde{n}\bar{r} + \gamma \bar{n} \end{aligned} \quad (1.14.13)$$

Bu eşitlikteki γ keyfi olarak seçilebilecek bir sayıdır.

Bu arada, eğer $\sin \theta \neq 0$ ise, gösterilebilir ki,

$$\hat{E}^{-1} = (\hat{I} + e^{-\tilde{n}\theta})/(2 \sin \theta) \quad (1.14.14)$$

Böylece, (1.14.13) denkleminden \bar{c} için aşağıdaki genel çözüm elde edilir.

$$\bar{c} = (\hat{I} + e^{-\tilde{n}\theta})(\tilde{n}\bar{r} + \gamma \bar{n})/(2 \sin \theta) \quad (1.14.15)$$

Özel olarak ise, \bar{c} ile \bar{n} vektörlerinin birbirine dik olduğu *minimal çözüm* seçilebilir. Bu çözüm, aşağıda doğrulandığı gibi, $\gamma = 0$ olmasını gerektirir.

$$\begin{aligned} \bar{n}^t \bar{c} &= 0 \Rightarrow \bar{n}^t (\hat{I} + e^{-\tilde{n}\theta})(\tilde{n}\bar{r} + \gamma \bar{n})/(2 \sin \theta) = 0 \Rightarrow \\ (\hat{I} + e^{-\tilde{n}\theta})(\bar{n}^t \tilde{n} \bar{r} + \gamma \bar{n}^t \bar{n})/(2 \sin \theta) &= (\hat{I} + e^{-\tilde{n}\theta})\gamma/(2 \sin \theta) = 0 \Rightarrow \\ \gamma &= 0 \end{aligned} \quad (1.14.16)$$

Bunun üzerine, minimal çözüm aşağıdaki ifadeyle elde edilir.

$$\bar{c} = (\hat{I} + e^{-\tilde{n}\theta})\tilde{n}\bar{r}/(2 \sin \theta) \quad (1.14.17)$$

Eğer $\sin \theta = 0$ ise, aşağıda incelenen üç özel durum ortaya çıkar.

- Hiç dönme olmaması, yani $\theta = 0$ olması:

Bu durumda, (1.14.6) denkleminde şu sonuçlar çıkarılır.

$$\bar{r} = \bar{n}s \Rightarrow \bar{n} = \bar{r}/|\bar{r}| \text{ ve } s = |\bar{r}| \quad (1.14.18)$$

Ne var ki, bu durumda $\theta = 0$ fakat $s \neq 0$ olduğu için gerçekçi bir vida yorumu yapılamaz. Ancak, biraz zorlamayla, $\lambda = \infty$ olan hayali bir vida yorumu yine de yapılabilir.

- Tam tur dönme ($\theta = 2\pi$) olması:

Bu durumda da, (1.14.6) denkleminde önceki durumla aynı sonuçlar çıkarılır.

$$\bar{r} = \bar{n}s \Rightarrow \bar{n} = \bar{r}/|\bar{r}| \text{ ve } s = |\bar{r}| \quad (1.14.19)$$

Bununla birlikte, bu durumda, $\lambda = s/(2\pi)$ olan gerçek bir vida yorumu yapılabilir.

- Yarım tur dönme ($\theta = \pi$) olması:

Bu durumda, (1.14.6) denklemi şu şekli alır.

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{n}s - (e^{\tilde{n}\pi} - \hat{I})\bar{c} = \bar{n}s - (\hat{I} + 2\tilde{n}^2 - \hat{I})\bar{c} \Rightarrow \\ \bar{r} &= \bar{n}s - 2\tilde{n}^2\bar{c} \end{aligned} \quad (1.14.20)$$

Bu durumda da, $s = \tilde{n}^t\bar{r}$ olarak bulunur ve hatvesi $\lambda = s/\pi$ olan gerçek bir vida yorumu yapılabilir. Bunun yanısıra, \bar{c} parametresi ise, (1.14.17) denkleminde aşağıdaki limit alma süreci ile belirlenebilir.

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\hat{I} + e^{-\tilde{n}(\pi+\varepsilon)}] \tilde{n}\bar{r} / [2 \sin(\pi + \varepsilon)] \Rightarrow \\ \bar{c} &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\hat{I} + e^{-\tilde{n}\pi} e^{-\tilde{n}\varepsilon}] \tilde{n}\bar{r} / (2\varepsilon) \Rightarrow \\ \bar{c} &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\hat{I} + (\hat{I} + 2\tilde{n}^2)(\hat{I} - \tilde{n}\varepsilon)] \tilde{n}\bar{r} / (2\varepsilon) \Rightarrow \\ \bar{c} &= -\tilde{n}^2\bar{r}/2 \end{aligned} \quad (1.14.21)$$

1.14.2. Vidasal Yerdeğiştirmeye İlişkin Homojen Dönüşüm Matrisi

Bu arada, Şekil 1.11'deki $\mathcal{F}_a(A)$ ve $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımlarının orijinleri sırasıyla C ve D noktalarına kaydırılarak *orijinleri dönme eksenini üzerinde ilerleyen* $\mathcal{F}_a(C)$ ve $\mathcal{F}_b(D)$ eksen takımları elde edilebilir. Bu özel eksen takımları arasındaki yerdeğiştirme ilişkileri aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$\text{Dönme Yerdeğiştirmesi: } \hat{C}^{(a,b)} = \hat{C} = e^{\tilde{n}\theta} \quad (1.14.22)$$

$$\text{Ötelenme Yerdeğiştirmesi: } \vec{r}_{CD} = \vec{n}s \text{ (orijinler arasında)} \quad (1.14.23)$$

$\mathcal{F}_a(C)$ ile $\mathcal{F}_b(D)$ arasındaki *homojen dönüşüm matrisi* ise, s ile θ arasındaki *vida ilişkisi* de kullanılarak, şöyle ifade edilebilir.

$$\hat{H}_{CD}^{(a,b)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)} & \vec{r}_{CD}^{(a)} \\ \vec{0}^t & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{H} = \begin{bmatrix} e^{\tilde{n}\theta} & \vec{n}s \\ \vec{0}^t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\tilde{n}\theta} & \lambda(\tilde{n}\theta) \\ \vec{0}^t & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14.24)$$

1.14.3. Bir Eksen Takımının Bir Başka Eksen Takımına Göre Hızı

Şekil 1.11'deki $\mathcal{F}_b(B)$ eksen takımının $\mathcal{F}_a(A)$ eksen takımına göre dönme ve ötelenme hızları şöyle ifade edilebilir.

$$\text{Dönme Hızı (Açısal Hız): } \vec{\omega}_{b/a} = \vec{\omega} \quad (1.14.25)$$

$$\text{Ötelenme Hızı: } \vec{v}_{B/A/\mathcal{F}_a} = D_a \vec{r}_{B/A} = D_a \vec{r}_{AB} = D_a \vec{r} = \vec{v} \quad (1.14.26)$$

Öte yandan, Chasles teoremine göre, *anlık dönme eksenini* (yani \vec{n} birim vektörü) sabit kabul edilebilir. Buna göre, $\vec{\omega}$ ve \vec{v} vektörleri için $\mathcal{F}_a(A)$ eksen takımında aşağıdaki matris ifadeleri yazılabilir.

$$\vec{\omega}^{(a)} = \vec{\omega} = \vec{n}\dot{\theta} \quad (1.14.27)$$

$$\vec{v}^{(a)} = \vec{v} = d\vec{r}/dt = d[\vec{n}s - (e^{\vec{n}\theta} - \hat{I})\vec{c}]/dt \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \vec{n}\dot{s} - \dot{\theta}\vec{n}e^{\vec{n}\theta}\vec{c} = \vec{n}\dot{s} - \dot{\theta}e^{\vec{n}\theta}\vec{n}\vec{c} \quad (1.14.28)$$

Vida ilişkisi varsayımıyla, (1.14.28) denklemi şöyle de yazılabilir.

$$\vec{v} = (\vec{n}\lambda - \vec{n}e^{\vec{n}\theta}\vec{c})\dot{\theta} = (\vec{n}\lambda - e^{\vec{n}\theta}\vec{n}\vec{c})\dot{\theta} = (\vec{n}\lambda + e^{\vec{n}\theta}\vec{c}\vec{n})\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$\vec{v} = (\lambda\hat{I} + e^{\vec{n}\theta}\vec{c})\vec{n}\dot{\theta} = (\lambda\hat{I} + e^{\vec{n}\theta}\vec{c})\vec{\omega} \quad (1.14.29)$$

Bu arada, dönme ve ötelenme hızlarını bir arada ifade etmek amacıyla *burum (twist)* adı verilen aşağıdaki genişletilmiş (6×1 boyutlu) dikeysıra matrisi tanımlanabilir.

$$\vec{\eta} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{n} \\ (\lambda\hat{I} + e^{\vec{n}\theta}\vec{c})\vec{n} \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (1.14.30)$$

(1.14.30) denklemi ise, *burgu (screw)* adı verilen aşağıdaki 6×1 boyutlu dikeysıra matris tanımına yol açar.

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} \vec{n} \\ (\lambda\hat{I} + e^{\vec{n}\theta}\vec{c})\vec{n} \end{bmatrix} \quad (1.14.31)$$

Burum ve burgu tanımları sayesinde iki eksen takımı arasındaki hız ilişkisi kısaca şöyle ifade edilebilir.

$$\vec{\eta} = \vec{S}\dot{\theta} \quad (1.14.32)$$

Aslında, yukarıdaki denklemlere bakılarak *burgu matrisi (screw matrix)* olarak anılan aşağıdaki 6×3 boyutlu matris de tanımlanabilir.

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \hat{I} \\ \lambda\hat{I} + e^{\vec{n}\theta}\vec{c} \end{bmatrix} \quad (1.14.33)$$

Böylece, $\vec{\omega} = \vec{n}\dot{\theta}$ olduğu göz önüne alınarak iki eksen takımı arasındaki hız ilişkisi şöyle de ifade edilebilir.

$$\vec{\eta} = \hat{S}\vec{\omega} \quad (1.14.34)$$